۱- مجموع ریشه هاي معادله $[x \quad 4 \quad -1]\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 4\\ -1\end{bmatrix} = 0$ را بیابید.

حل:

$$[x \quad 4 \quad -1]\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 4\\ -1\end{bmatrix} = [2x+4 \quad x-2 \quad 4]\begin{bmatrix}x\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$$

$$= [2x^2+8x-12] = 0$$

$$\Rightarrow\ x^2+4x-6=0 \quad \Rightarrow\ S = x'+x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{1} = -4$$

۲- اگر $A = \begin{bmatrix}4 & 6\\ -2 & -4\end{bmatrix}$ ، در این صورت A^6 را بیابید.

حل:

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}\times\mathrm{A} = \begin{bmatrix}4 & 6\\ -2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 6\\ -2 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = 4\mathrm{I}$$

$$\mathrm{A}^6 = \mathrm{A}^2\times\mathrm{A}^2\times\mathrm{A}^2 = 4\mathrm{I}\times 4\mathrm{I}\times 4\mathrm{I} = (64)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}64 & 0\\ 0 & 64\end{bmatrix}$$

۳- با يك مثال نشان دهيد ضرب ماتريس ها در حالت كلي تعويض پذير نيست.

حل: از دو ماتريس $A = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix}4 & 1\\ 8 & 2\end{bmatrix}$ استفاده مي كنيم. $AB \neq BA$ زيرا:

$$AB = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\ 8 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16 & 4\\ 52 & 13\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad BA = \begin{bmatrix}4 & 1\\ 8 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13 & 8\\ 26 & 16\end{bmatrix}$$

۴- با يك مثال نشان دهيد در ماتريس ها از $AB = 0$ نمي توان نتيجه گرفت كه $A = 0$ يا $B = 0$

حل: از دو ماتريس $A = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -8 & 4\end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix}4 & 1\\ 8 & 2\end{bmatrix}$ استفاده مي كنيم. با اينكه

$AB = \begin{bmatrix}4 & 1\\ 8 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -8 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = 0$ اما $A \neq 0$ و $B \neq 0$.

۵- با استفاده از ماتريس هاي زير نشان دهيد در حالت كلي در ماتريس ها از رابطه $AB = AC$ نمي توان نتيجه گرفت كه $B = C$ ، بعبارت ديگر در ضرب ماتريس قانون حذف برقرار نيست.

حل: با استفاده از سه ماتريس $B = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ داريم:

$$AB = \begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 6\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

و

$$AC = \begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 6\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

اما واضح است كه: $B \neq C$

۶- فرض کنید A و B دو ماتریس مربع هم مرتبه اند. اگر $M = AA^T - BB^T$ باشد، نشان دهید ماتریس M متقارن است.

حل: کافیست نشان دهیم $M^T = M$

$$M^T = (AA^T - BB^T)^T = (AA^T)^T - (BB^T)^T = AA^T - BB^T = M$$

۷- فرض کنید A و B دو ماتریس متقارن هم مرتبه اند. اگر $M = A^2B^3 - B^3A^2$ باشد، نشان دهید ماتریس M شبه متقارن است.

حل: چون دو ماتریس متقارن اند داریم $A = A^T$ و $B = B^T$ نشان مي دهيم: $M^T = -M$

$$\begin{aligned} M^T &= (A^2B^3 - B^3A^2)^T = (A^2B^3)^T - (B^3A^2)^T \\ &= (B^3)^T(A^2)^T - (A^2)^T(B^3)^T \\ &= (B^T)^3(A^T)^2 - (A^T)^2(B^T)^3 \\ &= B^3A^2 - A^2B^3 = -M \end{aligned}$$

۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ داده شده باشند، مطلوبست محاسبه حاصل عبارت $BC - 3A^2 + B^TA$.

حل: $BC - 3A^2 + B^TA =$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 14 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 22 & 17 \end{bmatrix}$$

۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^2 - 4A - 5I$ را بیابید.

حل:

$$\mathrm{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$-4\mathrm{A} = -4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 & -8 \\ -8 & -4 & -8 \\ -8 & -8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-5\mathrm{I} = -5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^2-4A-5I=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4&-8&-8\\-8&-4&-8\\-8&-8&-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5&0&0\\0&-5&0\\0&0&-5\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

۱۰- معادله ماتريسي زير را حل كنيد.

$$4\left(X+\begin{bmatrix}1&3\\5&4\end{bmatrix}\right)=2X+\begin{bmatrix}-3&5\\7&2\end{bmatrix}$$

حل:

$$4X-2X=\begin{bmatrix}-3&5\\7&2\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&3\\5&4\end{bmatrix}$$

$$2X=\begin{bmatrix}-7&-7\\-13&-14\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad X=\begin{bmatrix}\frac{-7}{2}&\frac{-7}{2}\\\frac{-13}{2}&\frac{-14}{2}\end{bmatrix}$$

۱۱- معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\begin{vmatrix}2&1\\2x&7\end{vmatrix}=0$

ب) $\begin{vmatrix}0&1&-2\\3&x&4\\1&3&2\end{vmatrix}=0$

حل: الف $14-2x=0\ \Rightarrow\ x=7$

ب $(4-18)-(-2x+6)=0\ \Rightarrow\ 2x=20\ \Rightarrow x=10$