۱

بسمه تعالی

امتحان پایان ترم درس ریاضیات کاربردی رشته های حسابداری و مدیریت صنعتی - زمان: ۹۰ دقیقه

۱- زاویه بین دو بردار $\vec{u} = 5i + j - k$ و $\vec{v} = i + 2j - 3k$ را بیابید.

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|} = \frac{۵+۲+۳}{\sqrt{۲۷}\,\sqrt{۱۴}} = \frac{۱۰}{۳\sqrt{۴۲}}$$

$$\Longrightarrow \theta = \operatorname{Arc}\cos \frac{۱۰}{۳\sqrt{۴۲}}$$

۲- حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$ را بیابید.

$$\text{دترمینان} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1+a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a)^2 - 1 - (1+a-1) + (1-(1+a))$$

$$= 1 + a^2 + 2a - 1 - a - a = a^2$$

۳- وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = ۱۷$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ -۵ & ۳ \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۱۷} & \frac{۴}{۱۷} \\ -\frac{۵}{۱۷} & \frac{۳}{۱۷} \end{bmatrix}$$

۴- دستگاه معادلات $\begin{cases} x+y+z=2 \\ y+2z=1+x \\ 2x+y=4+z \end{cases}$ را با روش کرامر حل کنید.

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = -۳$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ & -۱ \end{vmatrix} = -۹$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ \end{vmatrix} = ۳$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{۰}{-۳} = ۰$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-۹}{-۳} = ۳$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{۳}{-۳} = -۱$$

بسمه تعالي

امتحان پايان ترم درس رياضيات كاربردي رشته هاي حسابداري و مديريت صنعتي - زمان: ۹۰ دقيقه

۵- قضيه كيلي هميلتون را بيان كرده و به كمك آن وارون ماتريس $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ را بيابيد. قضیه و مثال ۲۳ ص ۱۰۶

۶- نشان دهيد $lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-2y}{2x+y^2}$ موجود نيست.

در امتداد خط $x=0$ داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0-2y}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-2}{y} = \pm\infty$$

در امتداد خط $y=0$ داریم

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-0}{2x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$$

حدها متفاوت اند پس حد موجود نیست.

۷- تابع $f(x,y) = xln\left(1+\frac{y}{x}\right) + yln(1+\frac{x}{y})$ داده شده است. حاصل $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$ را محاسبه كنيد.

$$f_x = \ln(1+\tfrac{y}{x}) + x \cdot \frac{-y/x^2}{1+y/x} + y \cdot \frac{(1/y)}{1+x/y} = \ln(1+\tfrac{y}{x}) - \frac{y}{x+y} + \frac{y}{x+y} = \ln(1+y/x)$$

$$f_y = x\,\frac{(1/x)}{1+y/x} + \ln(1+\tfrac{x}{y}) + y \cdot \frac{-x/y^2}{1+x/y} = \frac{x}{x+y} + \ln(1+x/y) - \frac{x}{x+y} = \ln(1+\tfrac{x}{y})$$

$$f_x + f_y = \ln(1+y/x) + \ln(1+x/y) = \ln\left[(1+y/x)(1+x/y)\right] = \ln(2+\tfrac{x}{y}+y/x) = \ln\frac{(x+y)^2}{xy}$$

(۳)

بسمه تعالي

امتحان پايان ترم درس رياضيات كاربردي رشته هاي حسابداري و مديريت صنعتي - زمان: ۹۰ دقيقه

۸- در تابع $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 3y^2 - 15x + 2$ نقاط بحراني و نوع آن ها را تعيين كنيد. فصل ۳ ص ۱۵۶

۹- اگر $y = \int_{tan2x}^{2^x} \sqrt[5]{te^{\sqrt{t-5}}}dt$ باشد $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه كنيد.

$$y' = (\ln 2)(2^x)\sqrt[5]{2^x e^{\sqrt{2^x - 5}}} - 2(1+\tan^2 2x)\sqrt[5]{\tan 2x \cdot e^{\sqrt{\tan 2x - 5}}}$$

۱۰- انتگرال هاي زير را محاسبه كنيد:

الف) $\int \frac{(\sin x+\cos x)dx}{(\sin x-\cos x)^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{du}{u^{1/3}} = \int u^{-1/3}du = \frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} + C$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} + C$$

$$\begin{cases} \sin x - \cos x = u \\ (\cos x + \sin x)\,dx = du \end{cases}$$

ب) $\int e^{3x}\cos 2x dx = \frac{3\cos 2x + 2\sin 2x}{13} \cdot e^{3x} + C$

از فرمول زير استفاده كردم.

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$$

پ) $\int \frac{(x+3)dx}{x^2-5x+4} = \frac{-4}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x-4}$

$\frac{x+3}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4}$

$A = -\frac{4}{3}$

$B = \frac{7}{3}$

$= \frac{-4}{3}\ln(x-1) + \frac{7}{3}\ln(x-4) + C$

$= \ln \frac{\sqrt[3]{(x-4)^7}}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} + C$

۱۱- جواب عمومي معادله ديفرانسيل $y' - \frac{1}{2x}y = \frac{3}{2}x$ را به دست آوريد.

$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{-1}{2x}dx} = e^{-\frac{1}{2}\ln x} = e^{\ln x^{-1/2}} = x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

طرفين معادله ضرب می‌کنیم $\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{x}}dy - \frac{y}{2x\sqrt{x}}dx = \frac{3}{2}x\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$d\left[y \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \frac{3\sqrt{x}}{2}dx \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{x}} = \int \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

$\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot y = x\sqrt{x} + C \Rightarrow \boxed{y = x^2 + C\sqrt{x}}$

۱۲- مساحت ناحيه محصور بين منحني $y = x^2$ و خط $y = 7x - 10$ ، را بيابيد.

$x^2 = 7x - 10 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2, 5$

$A = \int_2^5 \left[(7x-10)-(x^2)\right]dx = \left(\frac{7}{2}x^2 - 10x - \frac{x^3}{3}\right]_2^5$

$A = \frac{9}{2}$

"موفق باشيد"

خرازي

بسمه تعالي

امتحان پايان ترم درس رياضيات كاربردي رشته هاي حسابداري و مديريت صنعتي - زمان: ۹۰ دقيقه

۱- تصوير قائم بردار $\vec{u} = 3i - j - 5k$ را بر امتداد بردار $\vec{w} = 2i - j + k$ بيابيد.

$$u' = \frac{u \cdot w}{w \cdot w} w = \frac{۶+۱-۵}{۴+۱+۱}(۲, -۱, ۱) = \frac{۱}{۳}(۲, -۱, ۱)$$

$$u' = \frac{۲}{۳} i - \frac{۱}{۳} j + \frac{۱}{۳} K$$

۲- حاصل دترمينان $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ را بيابيد.

$$\text{دترمینان} = \begin{vmatrix} b & c \\ b^۲ & c^۲ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a^۲ & c^۲ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a^۲ & b^۲ \end{vmatrix} = (bc^۲ - cb^۲) - (ac^۲ - ca^۲) + (ab^۲ - ba^۲)$$

$$= (bc^۲ - cb^۲) - (ac^۲ - ab^۲) + (ca^۲ - ba^۲)$$

$$= bc(c-b) - a(c-b)(c+b) + a^۲(c-b)$$

$$= (c-b)[bc - ab - ac + a^۲]$$

$$= (c-b)[b(c-a) - a(c-a)] = (c-b)(c-a)(b-a).$$

۳- وارون ماتريس $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ را بيابيد.

$$|A| = -۲ \quad , \quad A^T = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} A_{۱۱} = -۱ & A_{۲۱} = ۰ & A_{۳۱} = ۲ \\ A_{۱۲} = -۱ & A_{۲۲} = ۰ & A_{۳۲} = ۰ \\ A_{۱۳} = ۰ & A_{۲۳} = -۲ & A_{۳۳} = ۰ \end{array}$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

$$A^{-1} = \frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بسمه تعالي

امتحان پايان ترم درس رياضيات كاربردي رشته هاي حسابداري و مديريت صنعتي - زمان: ۹۰ دقيقه

۴- دستگاه معادلات $\begin{cases} 4y + 2z = 1 \\ y + 3z = 2 + 5x \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}$ را با استفاده از روش كرامر حل كنيد.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 110$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -34 \qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-34}{110}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 23 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{23}{110}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{9}{110}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

۵- مقادير ويژه و بردار هاي ويژه ماتريس $\begin{bmatrix} 2 & 10 & 5 \\ -2 & -4 & -4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ را بيابيد. مثال ۲۲ ص ۱۵۴

بسمه تعالي

امتحان پایان ترم درس رياضيات كاربردي رشته هاي حسابداري و مديريت صنعتي - زمان: ۹۰ دقيقه

۶- نشان دهيد $lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ موجود نيست.

در امتداد مسیر $y=x^2$ داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,x^4}{x^2+(x^2)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{1+x^6} = \frac{0}{1} = 0$$

در امتداد مسیر $x=y^2$ داریم:

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^2 y^2}{(y^2)^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

حدها متفاوت اند پس حد موجود نیست.

۷- تابع $u = \frac{x^2y^2}{x+y}$ داده شده است. نشان دهيد: $xu_x + yu_y = 3u$

$$\begin{cases} u_x = \frac{2xy^2(x+y) - x^2y^2}{(x+y)^2} = \frac{x^2y^2+2xy^3}{(x+y)^2} \\ u_y = \frac{2x^2y\,(x+y) - x^2y^2}{(x+y)^2} = \frac{x^2y^2+2x^3y}{(x+y)^2} \end{cases}$$

$$x\,u_x + y\,u_y = \frac{x^3y^2+2x^2y^3+x^2y^3+2x^3y^2}{(x+y)^2} = \frac{3(x^3y^2+x^2y^3)}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{3x^2y^2(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{3x^2y^2}{(x+y)} = 3u$$

۸- در تابع $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1$ نقاط بحراني و نوع آن ها را تعيين كنيد.

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 12 = 0 \\ f_y = 2y+1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{2} \text{ و } 3x(x-4) = 0 \quad x=0,\ x=4$$

بنابراین نقاط مورد نظر $(0,-\frac{1}{2})$ و $(4,-\frac{1}{2})$ هستند.

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x-12 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12(x-2)$$

⑧

بسمه تعالي

امتحان پايان ترم درس رياضيات كاربردي رشته هاي حسابداري و مديريت صنعتي - زمان: ۹۰ دقيقه

الف) در نقطه $(0, -\frac{1}{2})$ داریم $\Delta = 12(0-2) = -24 < 0$ پس $(0, -\frac{1}{2})$ نقطه زینی تابع است.

ب) در نقطه $(-\frac{1}{2}, 4)$ داریم: $\Delta = 12(4-2) = 24 > 0$ و $f_{xx}(4) = 12 > 0$

پس تابع در $(-\frac{1}{2}, 4)$ دارای Min نسبی است.

۹- اگر $y = \int_{e^{2x}}^{\sqrt[3]{x}} \frac{sin2t}{e^{\sqrt{t-5}}}\,dt$ باشد $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه كنيد.

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right) \cdot \frac{\sin 2\sqrt[3]{x}}{e^{\sqrt{\sqrt[3]{x}-5}}} - 2e^{2x} \cdot \frac{\sin(2e^{2x})}{e^{\sqrt{e^{2x}-5}}}$$

۱۰- انتگرال هاي زير را محاسبه كنيد:

الف) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = 2\int \frac{du}{u^2} = \frac{-2}{u} + c = \frac{-2}{(1+\sqrt{x})} + c$

$$\left.\begin{array}{l} 1+\sqrt{x} = u \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = du \end{array}\right\}$$

ب) $I = \int e^{3x}x^2dx =$

$$I = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}\right)e^{3x} + c$$

/	$\int$
x^2	e^{3x}
$2x$	$+\ \frac{1}{3}e^{3x}$
2	$-\ \frac{1}{9}e^{3x}$
0	$+\ \frac{1}{27}e^{3x}$

بسمه تعالي

امتحان پايان ترم درس رياضيات كاربردي رشته هاي حسابداري و مديريت صنعتي - زمان: ۹۰ دقيقه

(پ) $$\int \frac{3x-1}{x(x^2-1)}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}\right) dx$$

$$= \ln x + \ln(x-1) - 2\ln(x+1) + C$$

$$= \ln \frac{x(x-1)}{(x+1)^2} + C$$

$$\frac{3x-1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{-2}{x+1}$$

۱۱- جواب عمومي معادله ديفرانسيل $y' + 2y = x^2 + 3x$ را به دست آوريد.

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$$

با ضرب در طرفين داريم

$$\Longrightarrow \quad e^{2x}dy + 2ye^{2x}dx = (x^2+3x)e^{2x}dx$$

$$d\left[y \cdot e^{2x}\right] = (x^2+3x)e^{2x}dx$$

$$ye^{2x} = e^{2x}\left[\frac{1}{2}(x^2+3x) - \frac{1}{4}(2x+3) + \frac{2}{8}\right] + C$$

$$y = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}$$

′		$\int$
x^2+3x		e^{2x}
$2x+3$	$+$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
2	$-$	$\frac{1}{4}e^{2x}$
0	$+$	$\frac{1}{8}e^{2x}$

۱۲- ناحيه محصور بين منحني $y = x^2$ و خط $y = 7x - 10$ ، را حول محور x ها دوران مي دهيم. حجم حاصل از اين دوران را بيابيد.

$$V = \int_a^b \pi\,(R^2 - r^2)\,dx$$

$$= \int_2^5 \pi\left[(7x-10)^2 - (x^2)^2\right]dx$$

$$= \pi\int_2^5 (49x^2 + 100 - 140x - x^4)\,dx$$

$$= \pi\left[\underbrace{\frac{49}{3}x^3 + 100x - 70x^2 - \frac{1}{5}x^5}_{=F(x)}\right]_2^5$$

$$= \pi\left(F(5) - F(2)\right)$$

$$\begin{cases} R = y_{\text{خط}} = 7x-10 \\ r = y_{\text{منحنی}} = x^2 \end{cases}$$

$$x^2 = 7x - 10$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = 2,\ 5$$

"موفق باشيد"

خرازي

بسمه تعالي

امتحان پايان ترم درس رياضيات كاربردي رشته هاي حسابداري و مديريت صنعتي - زمان: ۹۰ دقيقه

۱- حجم متوازي السطوحي كه با سه بردار $\vec{u} = -i + 2j - 5k$ و $\vec{w} = 3i + j - 2k$ و $\vec{v} = i - 3j + 2k$ ساخته مي شود را بيابيد.

$$w\cdot(u\times v) = \begin{vmatrix} ۳ & ۱ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۵ \\ ۱ & -۳ & ۲ \end{vmatrix} = ۳\begin{vmatrix} ۲ & -۵ \\ -۳ & ۲ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -۱ & -۵ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} + (-۲)\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & -۳ \end{vmatrix}$$

$$= -۳۳ - ۳ - ۲ = -۳۸$$

$$\Longrightarrow \text{حجم} = |-۳۸| = ۳۸$$

۲- حاصل دترمينان $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$ را بيابيد.

$$\text{دترمینان} = (1+a)\begin{vmatrix} 1+b & c \\ b & 1+c \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & c \\ a & 1+c \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & 1+b \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$= (1+a)(1+c+b+bc-bc) - b(a+ac-ac) + c(ab-a-ab)$$

$$= 1+c+b+a+\cancel{ac}+\cancel{ab}-\cancel{ba}-\cancel{ac} = 1+a+b+c$$

۳- رتبه ماتريس $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ را بيابيد. مثال ۵ ص ۴۷

۴- دستگاه معادلات $\begin{cases} x+y+z=2 \\ y+2z=1+x \\ 2x+y=4+z \end{cases}$ را با استفاده از ماتريس معكوس حل كنيد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}}_{=B} \quad , \quad |A| = -۳$$

بسمه تعالی

امتحان پایان ترم درس ریاضیات کاربردی رشته های حسابداری و مدیریت صنعتی - زمان: ۹۰ دقیقه

$$A^T=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} A_{11}=-3 \ ، & A_{21}=-(-3) \ ، & A_{31}=-3 \\ A_{12}=-(-2) \ ، & A_{22}=-3 \ ، & A_{32}=-(-1) \\ A_{13}=1 \ ، & A_{23}=-3 \ ، & A_{33}=2 \end{matrix}$$

$$\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ 3 & -3 & -3\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ 3 & -3 & -3\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2/3 & -1/3\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1/3 & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

۵- مقادیر ویژه و بردار های ویژه ماتریس $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$ را بیابید. ماتریس را A می‌نامیم داریم:

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 2 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)-2+2(2-\lambda)-2(1-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)-2+4-2\lambda-2+2\lambda=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)=0 \Longrightarrow \lambda_1=1 \ , \ \lambda_2=2 \ , \ \lambda_3=3$$

الف) محاسبه بردار ویژه نظیر $\lambda_1=1$:

$$(A-\lambda_1 I)X=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}1-1 & 0 & -1\\ 1 & 2-1 & 1\\ 2 & 2 & 3-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\\ 2x_1+2x_2+2x_3=0\end{cases} \Rightarrow x_1+x_2=0 \text{ و } x_2=-x_1$$

پس اگر $x_1=a$ قرار داده شود داریم $(x_1,x_2,x_3)=(a,-a,0)$

ب) برای $\lambda_2=2$ داریم:

$$(A-\lambda_2 I)X=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}1-2 & 0 & -1\\ 1 & 2-2 & 1\\ 2 & 2 & 3-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-x_1-x_3=0\\ x_1+x_3=0\\ 2x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}$$

اگر قرار دهیم $x_1=b$ داریم: $(x_1,x_2,x_3)=(b,-\frac{1}{2}b,-b)$

حالت (ج) زیر صفحه: ↓↓↓

۶- نشان دهید $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}$ موجود نیست.

در امتداد مسیر $y=mx$ داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+mx}{x-mx}=\frac{1+m}{1-m}$$

حد وابسته به m است پس منحصر به فرد نیست ولذا حد موجود نیست.

۷- اگر $z=xe^y+ye^x$ باشد نشان دهید: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z$

$$\left.\begin{matrix} z_x=e^y+ye^x \longrightarrow z_{xx}=ye^x \\ z_y=xe^y+e^x \longrightarrow z_{yy}=xe^y \end{matrix}\right\} \Rightarrow z_{xx}+z_{yy}=ye^x+xe^y = z$$

ادامه سوال ۵ ج) برای $\lambda_3=3$ داریم

$$(A-\lambda_3 I)X=0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1-3 & 0 & -1\\ 1 & 2-3 & 1\\ 2 & 2 & 3-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-2x_1-x_3=0\\ x_1-x_2+x_3=0\\ 2x_1+2x_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_2=-x_1\\ x_3=-2x_1\end{cases} \xrightarrow[\text{فرض}]{x_1=a} (x_1,x_2,x_3)=(a,-a,-2a)$$

بسمه تعالي

امتحان پايان ترم درس رياضيات كاربردي رشته هاي حسابداري و مديريت صنعتي - زمان: ۹۰ دقيقه

۸- در تابع $f(x,y) = x^3 + 3y^2 + y^3 - 3x - 9y + 2$ تمام نقاط بحراني و نوع آن ها را تعيين كنيد.

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3 = 0 \\ f_y = 6y + 3y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \pm 1 \\ y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1, -3 \end{array}$$

بنابراین چهار نقطه $(1,1)$ ، $(1,-3)$ ، $(-1,1)$ و $(-1,-3)$ داریم که بررسی می‌کنیم. داریم:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y+6 \end{vmatrix} = 36(x)(y+1)$$

الف) در $(1,1)$ داریم: $\Delta = 72 > 0$ و $f_{xx} = 6 > 0$ پس در $(1,1)$ تابع Min نسبی دارد.

ب) در $(1,-3)$ داریم $\Delta = -72 < 0$ پس این نقطه نقطه زینی تابع است.

ج) در $(-1,1)$ داریم $\Delta = -72 < 0$ پس این نقطه نیز نقطه زینی تابع است.

د) در $(-1,-3)$ داریم $\Delta = 72 > 0$ و $f_{xx} = -6 < 0$ پس تابع در این نقطه Max نسبی دارد.

۹- اگر $y = \int_{\sqrt{x}}^{3\sin 2x} e^{\sqrt{t-5}}\,dt$ باشد $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه كنيد.

$$\frac{dy}{dx} = 6\cos 2x \cdot e^{\sqrt{3\sin 2x - 5}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{\sqrt{x} - 5}}$$

۱۰- انتگرال هاي زير را محاسبه كنيد:

الف) $\int \frac{e^{2\sqrt{x+3}}}{\sqrt{x+3}}\,dx = \int e^u\,du = e^u + C = e^{2\sqrt{x+3}} + C$

$2\sqrt{x+3} = u$

$\frac{2\,dx}{2\sqrt{x+3}} = du$

ب) $\int \ln x\,dx = \underbrace{x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x}}_{u \cdot v - \int v \cdot du} = x \ln x - x + C$

$$\begin{cases} \ln x = u \\ dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx/x = du \\ x = v \end{cases}$$

بسمه تعالي

امتحان پایان ترم درس ریاضیات کاربردي رشته هاي حسابداري و مدیریت صنعتي - زمان: ۹۰ دقیقه

پ) $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+1)} = \int\left(\frac{\frac{1}{5}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{5}\ln(x+2) - \frac{1}{5}\int\frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{2}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}$

$$= \frac{1}{5}\ln(x+2) - \frac{1}{5\times 2}\ln(x^2+1) + \frac{2}{5}\tan^{-1}x + C$$

توضیح:

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)=1$$
$$\Rightarrow (A+B)x^2+(2B+C)x+A+2C=1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=0 \\ A+2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{5} \\ B=-\frac{1}{5} \\ C=\frac{2}{5} \end{cases}$$

۱۱- جواب عمومي معادله ديفرانسيل $y'+e^xy=5e^x$ را به دست آورید.

$$e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int e^x dx} = e^{e^x}$$

ضرب در طرفین معادله

$$e^{e^x}dy + e^x\cdot e^{e^x}\cdot y\,dx = 5e^x e^{e^x}dx$$

$$\int d\left(y\cdot e^{e^x}\right) = \int 5e^x e^{e^x}dx$$

$$e^x=u$$
$$\int e^x e^{e^x}dx=\int e^u du = e^u + c = e^{e^x}+c$$

انتگرال گیری

$$y e^{e^x}=5e^{e^x}+C$$

$$\boxed{y=5+Ce^{-e^x}}$$

۱۲- ناحیه محصور به منحني هاي $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ واقع در ربع اول، را حول محور x ها دوران مي دهیم. حجم حاصل از این دوران را بیابید.

$$V=\int_a^b \pi\left[R^2-r^2\right]dx$$

$$\begin{cases} R = y_1 = \sqrt{x} \\ r = y_2 = x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2=\sqrt{x} \\ x^4=x \\ x=0,1 \end{cases}$$

$$=\int_0^1\pi\left[(\sqrt{x})^2-(x^2)^2\right]dx$$

$$= \int_0^1 \pi(x-x^4)\,dx = \pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Big]_0^1$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=0.3\pi$$

"موفق باشید"

خرازي