بسمه تعالي

امتحان بين ترم درس رياضي ۱ گروه ۱ زمان: ۶۰ دقيقه نام و نام خانوادگي:

۱- مي خواهيم پوستري تهيه كنيم كه بر آن ۵۰ سانتيمتر مربع مطلب نوشته شود و حاشيه بالا و پايين هر يك ۴ سانتيمتر وحاشيه هر يك از دو طرف ۲ سانتيمتر باشد. ابعاد كل را طوري بيابيد تا كمترين مقدار كاغذ لازم باشد؟

۲- مطلوب است محاسبه $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{5n-1}\right)^{3n-7}$

۳- اگر $y=\int_{e^{3x}}^{sin2x}\frac{\sqrt[3]{t}}{Lnt}dt$ باشد $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه كنيد.

۴- ثابت كنيد: $sinh^{-1}x = \mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})$

۵- قضيه رل را بيان كنيد و با استفاده از آن نشان دهيد كه معادله زير دقيقا يك ريشه بين ۰ و ۱ دارد. $x^3-3x^2+5x-2=0$

۶- ثابت كنيد: $\int_0^a\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=\frac{a}{2}$

"موفق باشيد"

خرازي

حل مسايل امتحان ميان ترم

حل ۱- اگر ابعاد نوشته را x و y در نظر بگيريم خواهيم داشت:

$y = \frac{50}{x}$ $\Leftarrow$ $xy = 50$ ، $x > 0 , y > 0$ و مساحت كل صفحه كاغذ برابر است

با $S = (y + 8)(x + 4) = \left(\frac{50}{x} + 8\right)(x + 4)$ و لذا

$$\frac{ds}{sx} = 0 \Rightarrow \frac{-50}{x^2}(x + 4) + \left(\frac{50}{x} + 8\right) = 0$$

$$\frac{-50}{x^2} + 8 = 0 \Rightarrow 8x^2 = 200 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

$$y = \frac{50}{x} = 10$$

حل ۲- روش اول : چون حد عبارت داخل پرانتز $\frac{2}{5}$ است لذا مخرج كسر با سرعت بيشتري

به بي نهايت ميل مي كند پس حد حاصل صفر است.

روش دوم : اگر از طرفين ln بگيريم و سپس حد در بي نهايت را محاسبه كنيم چون

$Ln\frac{2}{5} < 0$ لذا $\lim_{n\to\infty}(Lny) = \lim_{n\to\infty}(3n - 7)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{5n-1}\right)^n = -\infty$

و بنابراين: $\lim_{n\to\infty} y = 0$

حل ۳- $\frac{dy}{dx} = 2cosx\frac{\sqrt[3]{sin2x}}{Lnsin2x} - 3e^{3x}\frac{\sqrt[3]{e^{3x}}}{Lne^{3x}} = 2cosx\frac{\sqrt[3]{sin2x}}{Lnsin2x} - \frac{e^{4x}}{x}$

حل ۴- $y = sinh^{-1}x \Rightarrow sinhy = x \Rightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y}$

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \Rightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1} \;\Rightarrow\; y = Ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

حل ۵- قضيه رل: فرض كنيد تابع $y = f(x)$ در $[a,b]$ پيوسته و در (a,b) مشتق پذير

باشد و $f(a) = f(b)$ آنگاه $\exists c \in (a,b): f'(x) = 0$

اكنون تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ در $[0,1]$ پيوسته و در $(0,1)$ مشتق پذير

است و $f(0)f(1) = (-2)(1) < 0$ پس بنا به قضيه مقدار مياني تابع در $(0,1)$ لااقل

يك ريشه دارد و چون مشتق آن مخالف صفر است نمي تواند بيش از يك ريشه داشته باشد.

(توجه شود كه : $3x^2 - 6x + 5 > 0$)

حل ۶- با استفاده از تغيير متغير $u = a - x$ داريم:

$$I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$$

$$= \int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(a-u)+f(u)}(-du) = \int_0^a \frac{f(a-u)}{f(a-u)+f(u)}du$$

پس :

$$2I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx + \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(x)}dx = \int_0^a dx = a$$

$$I = \frac{a}{2}$$