

آنالیز عددی دو

مدرس: دکتر رشیدی نیا

فهرست مطالب

عنوان

صفحات

فصل اول : حل سیستمهای خطی

1 - 3	مقدمه
3 - 5	روشهای مستقیم
5 - 7	روش حذفی گاوس
7 - 13	روش تجزیه مثلثی LU
13-14	استفاده از روش حداقل سازی
15-16	تمرینهای فصل
		روشهای تکراری :
16-19	روش ژاکوبی
19-23	روش گاوس - سایدل
23-31	روش تخفیف - SOR

آنالیز خطا

32-35	مقدمه :
35-39	آنالیز خطای روشهای مستقیم
39-44	آنالیز همگرایی روشهای تکراری
44-48	مثالهای حل شده

فصل دوم : مقادیر و بردارهای ویژه

49-50	مقدمه
50-51	روش بسط دترمینان
51-52	روش فادیو لوریر
52-57	قضایای مربوطه
		روشهای تکراری برای تعیین مقادیر ویژه یک ماتریس :
57-62	روش به توان رسانی
62-65	روشهای تبدیلی ژاکوبی
65-68	روش LR
68-72	روش هاوس هولدر
73-74	تمرینهای فصل

فصل سوم : حل عددی معادلات دیفرانسیل

.....	مقدمه
		75-76

روشهای تک گامی

77-80	روش تفاضلی اویلر	
81-87	روشهای رانگ کوتاه	
87-89	همگرایی و آنالیز خطای روشهای رانگ کوتاه	
	روشهای چند گامی	
90-95	روشهای گامی k گامی صریح آدامز - بشفورت	
95 -98	روشهای چند گامی ضمنی آدامز - مولتون	
98 - 100	روشهای پیشگوی اصلاحگر	
100 -	حل عددی مسائل مقدار مرزی	
		101
101 -	روش تفاضلی مرتبه دوم	
		104
104 - 106	روش نیومرو	
106 - 108	حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی	
109 - 111	روش اسمیت	
111 -	روش لاسنن	
		113
113 - 114	روش کرانک نیکلسون	
115 -	روش ریچارد سون	
		116
116	مثال های حل شده	
		- 118
118 -	تمرینهای فصل سوم	
		119

فصل اول

حل سیستمهای خطی

مقدمه:

سیستم n معادله و n مجهول خطی زیر را در نظر می گیریم

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (1)$$

به طوری که $i, j = 1(1)n$ و (a_{ij}) و b_i مقادیر حقیقی و معلوم باشند، x_i مجهولات سیستم خطی

(۱) هستند که بایستی محاسبه شوند. این سیستم را به فرم ماتریسی زیر می توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$AX = b$$

اگر $(b_i) = 0, i = 1(1)n$ باشند سیستم را همگن می نامیم و اگر حداقل یک b_i ناصفر باشد در این

صورت سیستم را سیستم ناهمگن خوانند. سیستم ناهمگن (۱) دارای جواب یکتاست اگر و فقط اگر

دترمینان A صفر نباشد یعنی:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

در این صورت جواب سیستم (۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$X = A^{-1}b$$

سیستم همگن $AX = \bar{0}$ دارای جواب $X = \bar{0}$ است اگر $\det(A) \neq 0$ باشد. بنابراین در مسائل عملی ما با سیستمهای همگن مواجه هستیم و جواب $X = \bar{0}$ برای ما عملاً پذیرفتنی نیست. لذا چنان چه سیستم را بر حسب پارامتر I به صورت زیر بنویسیم

$$AX = IX$$

و I را چنان یابیم که

$$\det(A - I) = 0$$

باشد آنگاه جواب ناصفر را برای X می یابیم. این مسئله ما را به مبحث مقادیر ویژه و بردارهای ویژه رهنمون می سازد. I را مقدار ویژه و X را بردار ویژه متناظر با آن می نامیم.

$$AX = IX \Rightarrow AX - IX = 0 \Rightarrow (A - I)X = 0 \quad (2)$$

برای اینکه جواب ناصفر بگیریم بایستی $\det(A - I) = 0$ باشد. از بسط دترمینان یک چندجمله ای درجه n ام بر حسب I خواهیم داشت که به معادله ویژه معروف است. از آنجا که سیستم خطی n معادله و n مجهول دارد این معادله دارای n ریشه است که I_1, I_2, \dots, I_n می باشند. ریشه های این معادله می توانند جملگی مجزا و حقیقی باشند، می توانند تکراری و مختلط نیز باشند. مقدار ویژه ای که از لحاظ کمی بیشترین مقدار را داشته باشد شعاع طیفی نامیم و با $r(A)$ نشان داده می شود.

II - چنانچه بتوان سیستم را به سیستم پائین مثلثی تبدیل کنیم یعنی ماتریس ضرایب A را به یک

ماتریس پائین مثلثی برگردانیم:

$$A \rightarrow L \Rightarrow \begin{aligned} l_{ij} &\neq 0 & \text{if } j \leq i \\ l_{ij} &= 0 & \text{if } j > i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

از رابطه اول ابتدا می توان x_1 را به صورت زیر به دست آورد:

$$x_1 = b_1 / a_{11}$$

و اگر x_1 را در رابطه دوم قرار دهیم x_2 را می توان یافت:

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1) / a_{22}$$

و به همین طریق سرانجام می توان x_3, x_4, \dots, x_n را یافت. یعنی:

$$x_n = \frac{(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j)}{a_{nn}}$$

لذا می توان الگوریتم جایگزینی از بالا را به صورت زیر بنویسیم.

برای سیستم $AX = b$ الگوریتم جایگزینی از بالا را به شرح زیر می نویسیم:

۱- مرحله اول: برای $k = 1(1)n$.

$$x_k = \frac{(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j)}{a_{kk}} \quad \text{۲- مرحله دوم: محاسبه کن}$$

III - اگر ماتریس ضرایب سیستم را به ماتریس بالا مثلثی تبدیل کنیم یعنی:

$$\begin{aligned} U_{ij} &\neq 0 & \text{if } i \leq j \\ U_{ij} &= 0 & \text{if } i > j \end{aligned}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{nn}x_n = b_n$$

با استفاده از جایگزینی از پائین ابتدا x_n را $(x_n = \frac{b_n}{a_{nn}})$ را محاسبه می کنیم و در روابط بالا قرار می

دهیم و سرانجام همه مقادیر x را محاسبه می کنیم. الگوریتم این حالت را که الگوریتم جایگزینی از

پائین می نامیم به شرح زیر است:

۱- مرحله اول: برای $k = n(-1)1$.

$$x_k = \frac{(b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}x_j)}{a_{kk}} \quad \text{۲- مرحله دوم: محاسبه کن}$$

نتیجه می گیریم که در سه حالت فوق عملاً مقدور است جوابهای سیستم را بیابیم. پس اساس کار

روشهای مستقیم و هدف آنها تبدیل سیستم به سه حالت فوق است. در زیر روش حذفی گاوس را

بررسی می کنیم.

روش حذفی گاوس

اساس این روش مستقیم بر حذف ساده مجهولات و تبدیل سیستم به سیستم بالا مثلثی است و با استفاده

از الگوریتم جایگزینی از پائین دستگاه معادلات را می توان به آسانی حل نمود. برای توضیح این روش

ابتدا فرض می کنیم سیستم $AX = b$ یک سیستم $n \times n$ و خوش وضع باشد. ابتدا سیستم را مرتب می

کنیم و تمام ضرایب سیستم را در محلهای مناسب به حافظه کامپیوتر می سپاریم و طرف راست سیستم

را نیز به حافظه کامپیوتر وارد می کنیم. سپس رابطه اول را نگه می داریم و به کمک این رابطه و

مضربهای مناسب ضریب x_1 را حذف می نمائیم. همه ضرایب مجهولات در $(n-1)$ رابطه باقیمانده

تغییر می نمایند و در همان محلهای قبلی به جای ضرایب قبلی به حافظه سپرده می شوند. $(n-1)$ رابطه

$$\begin{aligned}
b_i &= b_i^{(1)} & i &= 1(1)n \\
m_{i1}^{(1)} &= \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & i &= 2(1)n \\
a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - m_{i1}^{(1)} a_{1j}^{(1)} & i &= 2(1)n, j=1(1)n & \text{را که دستخوش تغییر} \\
b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - m_{i1}^{(1)} b_1^{(1)} & i &= 2(1)n & \text{شدند را مجددا مرتب} \\
a_{i1}^{(2)} &= 0 & i &= 2(1)n & \text{می کنیم. در دور بعد}
\end{aligned}$$

به کمک رابطه ۲ ضریب x_2 را از $(n-2)$ رابطه باقیمانده صفر می سازیم و این عمل را ادامه می دهیم.

حال فرض می کنیم به مرحله k ام رسیده ایم یعنی می خواهیم ضریب x_k را از $n-k$ رابطه باقیمانده صفر بسازیم. مضرب مناسب در این حالت عبارت است از:

$$\begin{aligned}
m_{ik}^{(k)} &= \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & i &= k+1(1)n \\
a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - m_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)} & i &= k+1(1)n \\
& & j &= k(1)n \\
b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - m_{ik}^{(k)} b_k^{(k)} & i &= k+1(1)n \\
a_{ik}^{(k+1)} &= 0 & i &= k+1(1)n
\end{aligned}$$

بدین طریق وقتی که $k=1(1)n$ تغییر کند سیستم را به سیستم بالامثلی تبدیل می کنیم.

چنانچه ماتریس ضرایب سیستم بزرگ باشد این روش شامل تعداد اعمال حسابی قابل توجهی است و در هر مرحله از روند محاسبات، اعداد محاسبه شده را در مرحله بعد به کار می بریم. این موقعیتی را ایجاد می کند که در آن انباشتگی خطا محتمل است و می تواند منشاء خطای بزرگی شود. پس باید سعی شود که خطا را Min سازیم. این کار زمانی عملی است که عنصر محور $a_{kk}^{(k)}$ بزرگترین عنصر

$a_{ik}^{(k)}$ در همان ستون برای $i \geq k$ باشد یعنی ضربهای به کار رفته از یک کوچکتر باشند تا خطای محاسباتی به حداقل مقدار ممکن برسد.

برای نیل به این هدف، لازم است که سیستم را مرتب کنیم. یعنی جای سطرها را عوض نماییم. این نوع مرتب کردن را محورگیری جزئی می نامیم. با محورگیری جزئی ممکن است در حین عملیات تقسیم بر صفر صورت گیرد. چنانچه پس از محورگیری جزئی لازم باشد تا از تقسیم بر صفر جلوگیری کنیم آنگاه می توان جای ستونها را عوض نماییم این عمل را محورگیری کلی می نامند. این روش را با مثال زیر توضیح می دهیم.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 36 & & 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = -16 \quad (1) \\ 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = -16 & \Rightarrow & 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 36 \quad (2) \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 20 & & x_1 + 8x_2 + x_3 = 20 \quad (3) \end{array}$$

مرحله اول: با استفاده از رابطه (1) ضریب x_1 را از روابط (2) و (3) صفر می سازیم.

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = -16 & (1)' & 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = -16 \\ m = -\frac{1}{2} & x_2 + 14x_3 = 44 & (2)' \Rightarrow 6x_2 + 4x_3 = 24 \\ m = -\frac{1}{4} & 6x_2 + 4x_3 = 24 & (3)' \quad x_2 + 14x_3 = 44 \end{array}$$

مرحله دوم: با استفاده از معادله $(2)'$ x_2 را از معادله $(3)'$ حذف می کنیم.

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = -16 & (1)'' & \\ 6x_2 + 4x_3 = 24 & (2)'' & \\ m = -\frac{1}{6} & \frac{40}{3}x_3 = 40 & (3)'' \end{array}$$

بنابراین با استفاده از الگوریتم جایگزینی از پائین

$$\begin{array}{l} x_3 = 3 \\ x_2 = \frac{24-12}{6} = 2 \\ x_1 = 1 \end{array}$$

روش تجزیه مثلثی LU

فرض می کنیم که سیستم خطی دارای n معادله و n مجهول باشد و ماتریس ضرایب سیستم نامنفرد باشد و کدهادهای اصلی پیشرو آن ناصفر باشند. در این صورت ماتریس ضرایب سیستم را می توان به دو سیستم بالا و پایین مثلثی به صورت زیر تجزیه کنیم.

$$A = LU$$

$$L = \begin{bmatrix} I_{11} & & & 0 \\ I_{21} & I_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ I_{n1} & I_{n2} & \cdots & I_{nn} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

با استفاده از قانون ضرب ماتریسی، L را در U ضرب می کنیم و عناصر حاصله را با درایه های متناظر ماتریس A مقایسه می کنیم.

حاصل ضرب سطر i ام از L و ستون j ام از U عبارت است از:

$$\begin{aligned} I_{i1}u_{1j} + I_{i2}u_{2j} + \dots + I_{in}u_{nj} &= a_{ij} & i, j = 1(1)n \\ I_{ij} &= 0 & j > i \\ u_{ij} &= 0 & i > j \end{aligned}$$

در رابطه فوق تعداد مجهولات از تعداد روابط بیشتر است (n مجهول بیشتر) لذا برای این که درایه هایی به صورت منحصر به فرد بیابیم لازم است که:

$$u_{ii} = 1 \quad i = 1(1)n$$

در این صورت می دانیم که همه درایه های اولین ستون U معلوم هستند. لذا می توان همه سطرهای L را در ستون اول U ضرب کرد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} I_{i1} &= a_{i1} & i = 1(1)n \\ u_{1j} &= \frac{a_{1j}}{I_{11}} & j = 2(1)n \end{aligned}$$

ابتدا اولین ستون L و سپس اولین سطر U را تعیین کردیم. حال دومین ستون L و آنگاه دومین سطر U را پیدا می کنیم.

$$\begin{aligned} I_{i2} &= a_{i2} - I_{i1}u_{12} & i = 2(1)n \\ u_{2j} &= \frac{(a_{2j} - I_{21}u_{1j})}{I_{22}} & j = 3(1)n \end{aligned}$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad i \geq j$$

$$u_{ij} = \frac{(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj})}{l_{ii}} \quad i < j$$

و سپس سومین ستون L و

سومین سطر U را محاسبه می کنیم و ادامه می دهیم. یعنی به ترتیب:

پس از تعیین درایه های L و U سیستم را به صورت زیر تجزیه می کنیم.

$$AX = b$$

$$LUX = b$$

و سیستم را به دو سیستم بالا و پائین مثلثی تبدیل می کنیم.

$$UX = Z \quad (1)$$

$$LZ = b \quad (2)$$

ابتدا سیستم (2) را که سیستم پائین مثلثی است حل کرده و با استفاده از الگوریتم جایگزینی از بالا

را می یابیم. سپس سیستم (1) را با استفاده از الگوریتم جایگزینی از پائین حل می کنیم و

x_1, \dots, x_{n-1}, x_n را به دست می آوریم.

مثال ۱:

سیستم داده شده زیر را با روش تجزیه مثلثی حل کنید.

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = 8, \quad l_{21} = 1, \quad l_{31} = 2$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = -8 - 1 \times \frac{1}{4} = -\frac{33}{4}$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$u_{23} = (a_{23} - l_{21}u_{13}) / l_{22} = \frac{3 - 1 \times (-\frac{1}{4})}{-\frac{33}{4}} = -\frac{13}{33}$$

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = 9 \Rightarrow l_{33} = 9 - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 9 - 2\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{13}{33}\right) = \frac{320}{33}$$

$$\begin{cases} LZ = b \\ UX = Z \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{33}{4} & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{320}{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{20}{33}, \quad z_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{33} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{20}{33} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

مثال ۲:

سیستم داده شده زیر را با روش تجزیه مثلثی حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = 1, \quad l_{21} = 4, \quad l_{31} = 3$$

$$u_{12} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$u_{13} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 3 - 4(1) = -1$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = 5 - 3 = 2$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = 1$$

$$u_{23} = \frac{(a_{23} - l_{21}u_{13})}{l_{22}} = \frac{-1 - 4}{-1} = 5$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 3 - 3 - 2 \times 5 = -10$$

$$LZ = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1 = 1, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = -\frac{1}{2}$$

$$UX = Z \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = 1$$

مثال ۳:

سیستم داده شده را با روش LU حل کنید.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = -5 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = 4, \quad l_{21} = 1, \quad l_{31} = 2, \quad l_{41} = -1$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{1}{2}$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = -\frac{1}{4}$$

$$u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}} = 0$$

$$l_{21}u_{12} + l_{22} = -2 \quad \Rightarrow l_{22} = -\frac{5}{2}$$

$$l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = 3 \quad \Rightarrow u_{23} = \frac{3 + \frac{1}{4}}{-\frac{5}{2}} = \frac{-13}{10}$$

$$l_{21}u_{14} + l_{22}u_{24} = 1 \quad \Rightarrow u_{24} = \frac{1 - 0}{-\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}$$

$$l_{31}u_{12} + l_{32} = -3 \quad \Rightarrow l_{32} = -3 - 1 = -4, \quad l_{42} = \frac{5}{2}$$

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = 5 \quad \Rightarrow l_{33} = \frac{3}{10}$$

$$l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + l_{33}u_{34} = 1 \quad \Rightarrow u_{34} = -2, \quad l_{42} = \frac{5}{2}, \quad l_{43} = 2$$

$$l_{41}u_{12} + l_{42}u_{22} + l_{43}u_{32} + l_{44} = -1 \quad \Rightarrow l_{44} = 11$$

$$l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} + l_{44} = -1 \quad \Rightarrow l_{44} = 11$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -4 & \frac{3}{10} & 0 \\ -1 & \frac{5}{2} & 2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = 10, z_4 = -2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{10} & -\frac{4}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 9, x_3 = 6, x_4 = -2$$

استفاده از حداقل سازی خطا

یک دستگاه معادلات خطی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - b_1 = R_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - b_2 = R_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 - b_3 = R_3$$

جملات R_1 و R_2 و R_3 اصطلاحاً باقیمانده نامیده می شوند و هنگامی صفر می شوند که x_1 و x_2 و

x_3 مقادیر دقیق خود را داشته باشند. بنابراین روشهای حدس اولیه طوری با تکرار تصحیح می شوند که

مقادیر R تا دقت مطلوب به صفر نزدیک شوند.

مثال:

دستگاه زیر را با روش حداقل سازی حل کنید.

$$10x_1 - 2x_2 + x_3 - 185 = R_1$$

$$-3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 93 = R_2$$

$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 49 = R_3$$

با تقریب اولیه ($x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$) شروع می کنیم. ($R_1 = -185, R_2 = -93, R_3 = -49$)

چون R_1 بزرگترین کمیت را داراست و x_1 بیشترین سهم را در تغییر آن دارد x_1 را طوری تغییر می دهیم تا R_1 مقداری نزدیک به صفر داشته باشد.

$$x_1 = 18 \quad R_1 = -5$$

$$x_2 = 0 \quad R_2 = -147 \quad \text{بزرگتر}$$

$$x_3 = 0 \quad R_3 = -31$$

$$x_1 = 18 \quad R_1 = 43$$

$$x_2 = -24 \quad R_2 = -3$$

$$x_3 = 0 \quad R_3 = 17$$

مجددا برای کاهش R_1 به عنوان بزرگترین باقیمانده ناچارا x_1 را تغییر می دهیم. این عملیات را به همین ترتیب ادامه داده تا $\sum R^2$ با دقت مطلوب به صفر نزدیک شود.

۱- نشان دهید که ماتریس زیر نامنفرد است اما نمی توان به صورت LU تجزیه شود.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

راهنمایی: [چون $I_{22} = 0$ است] نمی توان u_{23} را محاسبه کرد. با این که $|A| = 10 \neq 0$ چون زیرماتریسی با دترمینان صفر دارد این روش جواب نمی دهد.

۲- دستگاه سه معادله و سه مجهول زیر را در نظر می گیریم. با روشهای حذفی گاوس و LU حل کنید.

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 4 \\ 3x + 5y + z = 7 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

۳- سیستمهای خطی زیر را باروش حذفی گاوس با محورگیری جزئی حل کنید.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$$

۴- سیستمهای تمرین ۳ را باروش تجزیه مثلثی حل کنید.

۵- دستگاه زیر را با محورگیری جزئی حل کرده و کلیه عملیات محاسباتی را تا چهار رقم اعشار انجام

دهید.

$$\begin{aligned} 4.01x_1 + 1.23x_2 + 1.43x_3 - 0.73x_4 &= 5.94 \\ 1.23x_1 + 7.41x_2 + 2.41x_3 + 3.02x_4 &= 14.07 \\ 1.43x_1 + 2.41x_2 + 5.79x_3 - 1.11x_4 &= 8.52 \\ -0.73x_1 + 3.02x_2 - 1.11x_3 - 16.41x_4 &= 7.59 \end{aligned}$$

۶- ماتریس B به صورت زیر تعریف شده است:

$$B = I + irA^2$$

در اینجا I ماتریس واحد و A ماتریسی هرمیتی و $\|A\|$ بیانگر نرم هیلبرت است. هم چنین $i^2 = -1$.

نشان دهید برای تمام مقادیر حقیقی $r \neq 0$ ، $\|B\| > 1$.

روشهای تکراری

این روشها با توجه به سادگی و عدم حساسیتشان نسبت به خطای گرد کردن (*Round Error*) برای کاربرد با برنامه های کامپیوتری مناسبتر از روشهای مستقیم می باشند، زیرا در مقایسه با روشهای مستقیم حافظه کمتری را اشغال می کنند و می توانند عملیات تکرار را تا رسیدن به دقت مورد نظر ادامه دهند. برای آشنایی با این روشها ابتدا روش تکرار ژاکوبی را فرامی گیریم.

الف) روش تکراری ژاکوبی

سیستم خطی

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

مفروض است. این روش در حقیقت تعمیم روش تکرار ساده در حل معادلات غیر خطی و یک متغیره است. ابتدا سیستم خطی را مرتب می کنیم به طریقی که درایه های روی قطر ناصفر باشند و از لحاظ کمی نسبت به سایر درایه های هم سطر آن بیشترین کمیت را داشته باشد سپس دستگاه معادلات خطی را طوری بازنویسی می کنیم که هر کدام از روابط یکی از مجهولات را بر حسب مجهولات دیگر بیان نماید.

$$\begin{aligned}x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n)/a_{11} \\x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - \dots - a_{2n}x_n)/a_{22} \\&\vdots \\x_n &= (b_n - a_{n1}x_1 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1})/a_{nn}\end{aligned}$$

با تقریب اولیه دلخواه $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]$ شروع می کنیم و دور تکراری را آغاز می

نماییم. فرض می کنیم تقریب $X^{(1)}$ را محاسبه کرده ایم. سپس این مقدار را به عنوان تقریب در دور

بعد به کار می گیریم و $X^{(2)}$ را می یابیم و این عمل را ادامه می دهیم. پس:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \dots - a_{1n}x_n^{(0)})/a_{11} \\x_2^{(1)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - \dots - a_{2n}x_n^{(0)})/a_{22} \\&\vdots \\x_n^{(1)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(0)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(0)})/a_{nn}\end{aligned}$$

سپس $X^{(1)}$ را در رابطه فوق قرار می دهیم. داریم:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(1)})/a_{11} \\x_2^{(2)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(1)})/a_{22} \\&\vdots \\x_n^{(2)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)})/a_{nn}\end{aligned}$$

اگر فرض کنیم این عملیات $k-1$ مرتبه تکرار شود سرانجام X^k را به شرح زیر می یابیم.

$$\begin{aligned}x_1^{(k)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)})/a_{11} = (b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^{(k-1)})/a_{11} \\x_2^{(k)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)})/a_{22} = (b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n a_{2j}x_j^{(k-1)})/a_{22} \\&\vdots \\x_n^{(k)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)})/a_{nn} = (b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k-1)})/a_{nn}\end{aligned}$$

الگوریتم روش ژاکوبی

سیستم $AX = b$ داده شده، یک تقریب اولیه $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]$ انتخاب می

کنیم. دستگاه را مرتب کرده تا تقسیم بر صفر صورت نگیرد.

۱- مرحله اول: برای $k=0$.

۲- مرحله دوم: برای $i=1(1)n$ محاسبه می کنیم:

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}$$

۳- مرحله سوم: اگر $x_i^{(k+1)}$ به اندازه کافی دقیق باشد یعنی به معیار دقت حل مسئله

$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| \leq \epsilon$ رسیده باشد به مرحله چهارم می رویم. در غیر این صورت $k = k+1$ به مرحله

دوم برگردیم.

۴- روند را متوقف کنید.

حال الگوریتم فوق را با نماد ماتریسی نشان می دهیم که جهت کارهای نظری مانند همگرایی روش به

آن نیاز داریم.

اگر طرفین رابطه فوق را در a_{ii} ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1^{(k)} &= b_1 - a_{12} x_2^{(k-1)} - \dots - a_{1n} x_n^{(k-1)} \\ a_{22} x_2^{(k)} &= b_2 - a_{21} x_1^{(k-1)} - \dots - a_{2n} x_n^{(k-1)} \\ &\vdots \\ a_{nn} x_n^{(k)} &= b_n - a_{n1} x_1^{(k-1)} - \dots - a_{n,n-1} x_{n-1}^{(k-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & U \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ L & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow DX^{(k)} = -(L+U)X^{(k-1)} + b$$

$$X^{(k)} = -D^{-1}(L+U)X^{(k-1)} + D^{-1}b$$

که $-D^{-1}(L+U)$ را برابر با H می گیرند و ماتریس روش تکراری ژاکوبی گویند. معمولا $D^{-1}b$

را هم برابر با C می گیرند. پس داریم:

$$X^{(k)} = H_j X^{(k-1)} + C_j \quad k=1,2,3,\dots$$

می توان H_j را هم به صورت زیر نوشت:

$$H_j = -D^{-1}(-D + D + L + U) = -D^{-1}(-D + A)$$

$$H_j = (I - D^{-1}A)$$

(ب) روش تکراری گاوس - سایدل

این روش اصلاح شده روش ژاکوبی است. در این روش آخرین مقدار محاسبه شده برای مجهولات (برای هر یک از مجهولات) در معادلات بعدی مورد استفاده قرار می گیرند. این روش در عین حال زودتر از روش قبل به جواب می رسد و حافظه کمتری از کامپیوتر را اشغال می کند. زیرا هر بار از متغیرهای جدید استفاده می کند و نیازی به ذخیره سازی مقادیر $X^{(k)}$ نمی باشد. حدس اولیه هیچ گونه تاثیری بر سرعت همگرایی نخواهد داشت.

اگر ضرایب روی قطر سیستم در هر سطر از مجموع سایر ضرایب همان سطر بزرگتر باشد عملیات خیلی زودتر به جواب خواهد رسید.

حال اگر سیستم مرتب شده ژاکوبی را در نظر بگیریم:

$$x_1^{(1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \dots - a_{1n}x_n^{(0)})/a_{11}$$

$$x_2^{(1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(0)})/a_{22}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)})/a_{nn}$$

که $X^{(1)}$ به دست می آید. مجدداً این روش را ادامه می دهیم. این بار:

$$x_1^{(2)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \dots - a_{1n}x_n^{(1)})/a_{11}$$

$$x_2^{(2)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(2)} - \dots - a_{2n}x_n^{(1)})/a_{22}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(2)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(2)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(2)})/a_{nn}$$

و $X^{(2)}$ حاصل می شود. فرض کنیم این عمل $k-1$ بار انجام شود داریم:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)})/a_{11} = (b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^{(k-1)})/a_{11} \\
x_2^{(k)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)})/a_{22} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \sum_{j=3}^n a_{2j}x_j^{(k-1)})/a_{22} \\
&\vdots \\
x_n^{(k)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})/a_{nn} = (b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k)})/a_{nn}
\end{aligned}$$

الگوریتم روش گاوس - سایدل

برای سیستم $AX = b$ و برای تقریب اولیه مفروض $X^{(0)}$ و با انتخاب Z معیار دقت داده شده

الگوریتم روش گاوس - سایدل به شرح زیر است:

۱- مرحله اول: برای $k=1$.

۲- مرحله دوم: برای $i=1(1)n$ محاسبه کن :

$$x_i^{(k)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)})/a_{ii}$$

۳- مرحله سوم: اگر $X^{(k)}$ به اندازه کافی دقیق باشد یا به عبارت دیگر $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \leq Z$ باشد به

مرحله چهارم برو. در غیر این صورت $k = k+1$ و به مرحله دوم برو.

۴- روند را متوقف کنید.

برای نشان دادن فرم ماتریسی آن اگر $X^{(k)}$ را در طرف چپ و $X^{(k-1)}$ را در طرف راست رابطه فوق

قرار دهیم بدین صورت مرتب خواهد شد.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1^{(k)} &= b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)} \\
a_{22}x_2^{(k)} &= b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)} \\
&\vdots \\
a_{nn}x_n^{(k)} &= b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} \\
\hline
a_{11}x_1^{(k)} &= -a_{12}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)} + b_1 \\
a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} &= -a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)} + b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \dots + a_{nn}x_n^{(k)} &= b_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (L+D)X^{(k)} &= -UX^{(k-1)} + b \\
X^{(k)} &= -(L+D)^{-1}UX^{(k-1)} + (L+D)^{-1}b \\
X^{(k)} &= H_g X^{(k-1)} + C_g \quad k=1,2,3,\dots \\
H_g &= -(D+L)^{-1}U \quad , \quad C_g = (D+L)^{-1}b
\end{aligned}$$

ادامه روش تکرار به صورت فوق برای کارهای نظری بهتر است. برای کاربرد عملی از فرم زیر بهتر

است استفاده شود

$$x_i^{(k+1)} = \frac{(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)})}{a_{ii}} \quad i=1(1)n$$

مثال:

دستگاه سه معادله سه مجهول زیر را با روش گاوس-سایدل و ژاکوبی حل کنید. مراحل تکرار را تا ۱۴

مرحله در نظر بگیرید و درصد خطای نسبی را بیابید.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

حل به روش ژاکوبی:

$$\begin{cases} x_1 = (7 + x_2)/2 \\ x_2 = (1 + x_3 + x_1)/2 \\ x_3 = (1 + x_2)/2 \end{cases}$$

حال تقریب دلخواه اولیه $X^{(0)} = [0,0,0]$ را در نظر می گیریم. پس داریم:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3.5 \\ x_2^{(1)} = 0.5 \\ x_3^{(1)} = 0.5 \end{cases} \Rightarrow X^{(1)} = [3.5, 0.5, 0.5]$$

حال $X^{(1)}$ تقریبی برای مرحله بعدی می شود.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 3.75 \\ x_2^{(2)} = 2.5 \\ x_3^{(2)} = 0.75 \end{cases} \Rightarrow X^{(2)} = [3.75, 2.5, 0.75]$$

و این روند را مجددا ادامه می دهیم تا جایی که $\|X^{(m)} - X^{(m-1)}\| \leq 3 \times 10^{-4}$ شود.

حل به روش گاوس - سایدل:

$$x_1^{(1)} = 3.5$$

$$x_2^{(1)} = (1 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)})/2 = 2.25 \quad \Rightarrow X^{(1)} = [3.5, 2.25, 1.625]$$

$$x_3^{(1)} = (1 + x_2^{(1)})/2 = 1.625 \quad \|X^{(1)} - X^{(0)}\| = \max_{1 \leq i \leq 3} \{x_i\} = 3.5$$

$$x_1^{(2)} = \frac{7 + 2.25}{2} = 4.625$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1 + 4.625 + 1.625}{2} = 3.625 \quad \Rightarrow X^{(2)} = [4.625, 3.625, 2.3125]$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1 + 3.625}{2} = 2.3125 \quad \|X^{(2)} - X^{(1)}\| = 1.375$$

$$x_1^{(3)} = 5.3125$$

$$x_2^{(3)} = 4.3125$$

$$x_3^{(3)} = 2.65625$$

⋮

بالاخره در مرحله ۱۳ داریم:

$$x_1^{(13)} = 5.9993$$

$$x_2^{(13)} = 4.9993$$

$$x_3^{(13)} = 2.9996$$

و در تکرار ۱۴ :

$$x_1^{(14)} = 5.9996$$

$$x_2^{(14)} = 4.9996$$

$$x_3^{(14)} = 2.9998$$

حال خطای مطلق $\|X^{(14)} - X^{(13)}\| = \|(0.0003, 0.0003, 0.0002)^T\| = 3 \times 10^{-4}$ و درصد خطای

$$\text{نسبی} \times 100 = \frac{0.0003}{5.9996} \times 100 = \frac{\|X^{(14)} - X^{(13)}\|}{\|X^{(14)}\|} \times 100 \text{ به دست می آید.}$$

مثال:

آیا روش ژاکوبی یا گاوس-سایدل برای حل سیستم زیر همگراست؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

حل

چون $1 > 4 = \max_i \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| = \|H\|$ روش ژاکوبی واگراست.

$$H_g = -(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\|H_g\| = \max\{4, 5, 2\} = 5 > 1$$

یعنی این روش هم همگرا نیست.

روش تخفیف

ما در قبل بررسی کردیم که سرعت همگرایی یک روند به شعاع طیفی ماتریس تکراری آن روش بستگی دارد. یک راه حلی که منجر به همگرایی سریع می شود، آن است که روشی انتخاب شود که ماتریس تکراری آن کوچکترین شعاع طیفی را داشته باشد.

برای تسریع، روش گاوس - سایدل را در نظر می گیریم. چنان چه جواب تقریبی در مرحله k ام

$$X^{(k)} = (X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \dots, X_{i-1}^{(k)}, X_i^{(k-1)}, \dots, X_n^{(k-1)})^T$$

باشد و در روابط صدق نماید این جوابها جواب دقیق سیستم هستند. در غیر این صورت اگر در روابط

صدق نکنند در هر رابطه یک مانده خواهیم داشت. بنابراین بردار مانده را با R نمایش می دهیم:

$$R_i^{(k)} = (r_{1i}^{(k)}, r_{2i}^{(k)}, \dots, r_{ni}^{(k)})^T$$

مؤلفه i ام این بردارهای مانده عبارت است از:

$$\begin{aligned} r_{ii}^{(k)} &= b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j^{(k-1)} & i=1(1)n \\ r_{ii}^{(k)} + a_{ii} X_i^{(k-1)} &= b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j^{(k-1)} & i=1(1)n \\ a_{ii} X_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} &= b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j^{(k-1)} & i=1(1)n \quad (1) \end{aligned}$$

ما از روش گاوس - سایدل داریم:

$$X_i^{(k)} = \frac{(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j^{(k-1)})}{a_{ii}} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2) \text{ in } (1)} a_{ii} X_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = a_{ii} X_i^{(k)}$$

$$\therefore X_i^{(k)} = X_i^{(k-1)} + \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \quad (3)$$

پس اگر مانده را در یک فاکتور w ضرب کنیم داریم:

$$X_i^{(k)} = X_i^{(k-1)} + \frac{w r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \quad i=1(1)n, k=1,2,\dots \quad (4)$$

که در آن

۱- اگر فاکتور $0 < w < 1$ باشد در این صورت روش را تحت تخفیف گوئیم و می توان آن را جهت به

دست آوردن همگرایی دستگانهایی که به روش گاوس - سایدل همگرا نیستند به کار برد.

۲- اگر فاکتور $1 < w < 2$ باشد در این صورت روش را فوق تخفیف یا *SOR* می نامیم و برای

سرعت بخشیدن به همگرایی دستگانهایی که به روش گاوس - سایدل همگرا هستند به کار می رود.

۳- اگر $w = 1$ باشد روش همان روش گاوس - سایدل است.

اگر به جای $r_{ij}^{(k)}$ در (4) رابطه (1) قرار دهیم:

$$\begin{aligned} x_i^{(k)} &= x_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) \quad k=1,2,\dots \quad i=1(1)n \\ &= x_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} - a_{ii} x_i^{(k-1)} \right) \\ &= x_i^{(k-1)} - w x_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^i a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) \\ \therefore x_i^{(k)} &= (1-w) x_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) \end{aligned}$$

الگوریتم روش *SOR*

برای سیستم داده شده $AX = b$ و یک تقریب اولیه و انتخاب مناسب w و Z داده شده عبارت است

از:

۱- مرحله اول: برای $k=1$.

۲- مرحله دوم: برای $i=1(1)n$ محاسبه کن:

$$x_i^{(k)} = (1-w) x_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

۳- اگر $X^{(k)}$ دقیق باشد و یا به عبارت دیگر $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \leq \epsilon$ برو به مرحله ۴.

در غیر این صورت $k = k+1$ و به مرحله ۲ برو.

۴- متوقف شو.

اثبات همگرایی به روش ماتریسی:

$$a_{ii}x_i^{(k)} = a_{ii}(1-w)x_i^{(k-1)} + w(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)})$$

$$a_{ii}x_i^{(k)} = a_{ii}(1-w)x_i^{(k-1)} + wb_i - w \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)}$$

$$(D+wL)X^{(k)} = [(1-w)D - wU]X^{(k-1)} + wb$$

$$X^{(k)} = (D+wL)^{-1}[(1-w)D - wU]X^{(k-1)} + w(D+wL)^{-1}b$$

or

$$X^{(k)} = H_w X^{(k-1)} + C \quad k=1,2,\dots$$

برای تعیین فاکتور w جهت استفاده از روش SOR ابتدا دو قضیه زیر را بیان می کنیم.

قضیه کاهان:

برای هر ماتریس دلخواه $A_{n \times n}$ ، $r(H_w) \geq |w-1|$ است. اگر روش SOR همگرا باشد آنگاه

$$0 < w < 2$$

که در آن $H_w = (D+wL)^{-1}[(1-w)D - wU]$ ماتریس تکراری روش SOR است.

اثبات:

برای اثبات قضیه ماتریس $I + wD^{-1}L$ را در نظر می گیریم. این یک ماتریس پایین مثلثی است و قطر

اصلی آن واحد می باشد. بنابراین برای هر مقدار دلخواه w ، $\det\{(I + wD^{-1}L)\} = 1$. بنابراین

چند جمله ای مشخصه ماتریس تکراری H_w را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} P(I) &= \det(II - H_w) = \det(I + wD^{-1}L)(II - H_w) \\ &= \det[I(I + wD^{-1}L) - (I - wD^{-1}L)H_w] \end{aligned} \quad (1)$$

اما ماتریس تکراری SOR عبارت است از:

$$\begin{aligned}
H_w &= (D + wL)^{-1}[(1-w)D - wU] \\
&= [D(I + wD^{-1}L)]^{-1}[D(1-w)I - wD^{-1}U] \\
&= (I + wD^{-1}L)^{-1}D^{-1}D[(1-w)I - wD^{-1}U] \\
&= (I + wD^{-1}L)^{-1}[(1-w)I - wD^{-1}U] \quad (2) \\
\stackrel{(2) \text{ in } (1)}{\longrightarrow} P(I) &= \det\{I(I + wD^{-1}L) - (I + wD^{-1}L)(I + wD^{-1}L)^{-1}[(1-w)I - wD^{-1}U]\} \\
&= \det\{I(I + wD^{-1}L) - (1-w)I + wD^{-1}U\} \\
&= \det\{[I - (1-w)]I + IwD^{-1}L + wD^{-1}U\} \quad (3) \\
P(0) &= \det\{-(1-w)I + wD^{-1}U\} = (w-1)^n \quad (4)
\end{aligned}$$

که ماتریسی بالامتثالی است و روی قطر اصلی $w-1$ است.

$$\prod_{i=1}^n |I_i(H_w)| = |w-1|^n$$

$$r(H_w) = \max\{|I_i(H_w)|\}$$

$$[r(H_w)]^n \geq |w-1|^n \Rightarrow r(H_w) \geq |w-1|$$

حال اگر روش SOR همگرا باشد لازم است داشته باشیم $r(H_w) < 1$. بنابراین نتیجه می گیریم که:

$$r(H_w) \leq |w-1| \leq 1 \Rightarrow 0 < w < 2$$

تعریف:

ماتریس $A_{n \times n}$ را معین مثبت گوئیم هرگاه برای یک بردار ناصفر X داشته باشیم:

$$X^T A X > 0$$

or

$$X^T A X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j x_i > 0$$

اگر $X^T A X \geq 0$ ماتریس شبه معین مثبت نامیده می شود.

مثال:

نشان دهید ماتریس زیر معین مثبت است.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

حل

A متقارن و سه قطری است.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq \bar{0}$$

$$X^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$$

$$\begin{aligned} [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \\ -x_2 + 4x_3 \end{bmatrix} \\ &= 4x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= x_1^2 + 3(x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 3x_3^2 > 0 \end{aligned}$$

یعنی A معین مثبت است.

قضیه:

هرگاه ماتریس $A_{n \times n}$ معین مثبت و سه قطری باشد آن گاه:

$$r(H_g) = [r(H_j)]^2 < 1$$

که در آن H_g ماتریس تکراری روش گاوس-سایدل و H_j ماتریس تکراری روش ژاکوبی است.

بهترین انتخاب w روش SOR عبارت است از:

$$r(H_w) = w - 1$$

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [r(H_j)]^2}}$$

و یا در مسائل عملی w_{opt} از فرمولهای زیر محاسبه می گردد:

$$w_{opt} = \frac{2}{1 + \sin ph}$$

$$r(H_w) = \frac{1 - \sin ph}{1 + \sin ph} = \frac{2 - (1 + \sin ph)}{1 + \sin ph} = w_{opt} - 1$$

که $h = \frac{1}{1+n}$ گامهایی است که معادله دیفرانسیل با آن حل شده است.

مثال:

دستگاه زیر را با روش SOR حل کنید. در صورتی که معیار دقت $z = 0.8 \times 10^{-2}$ و تقریب اولیه

$$X^{(0)} = [1, 1, 1]^T \text{ باشد.}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ -x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases}$$

حل

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

ماتریس متقارن و سه قطری است و در مثال قبل نشان دادیم معین مثبت نیز است. پس می توان از قضیه

فوق استفاده کرد و فاکتور w را محاسبه نمود.

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - r^2(H)}} ; H_w = -D^{-1}(L + w)$$

برای دستگاه داده شده ماتریس تکراری ژاکوبی عبارت است از:

$$H_j = - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$|H_j - I| = \begin{vmatrix} -I & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & -I & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -I \end{vmatrix} = -I(I^2 - \frac{10}{16}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 0 \\ I_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{10}}{4} \end{cases} \Rightarrow r^2(H_j) = \frac{10}{16}$$

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{10}{16}}} \cong 1.25$$

با توجه به مقدار w استفاده از روش SOR مجاز است.

سیستم را مرتب می کنیم. سپس طرفین فوق را در $w = 1.25$ ضرب می کنیم. در انتها x_1 و x_2 و x_3 را

در طرف چپ و بقیه را به سمت راست انتقال می دهیم.

$$x_1 = (24 - 3x_2) / 4$$

$$x_2 = (30 - 3x_1 + x_3) / 4$$

$$x_3 = (-24 + x_2) / 4$$

$$1.25x_1 = 7.5 - 0.937x_2$$

$$1.25x_2 = 9.375 - 0.937x_1 + 0.3125x_3$$

$$1.25x_3 = -7.5 + 0.3125x_2$$

$$x_1 = 7.5 - 0.937x_2 - 0.25x_3$$

$$x_2 = 9.375 - 0.937x_1 + 0.3125x_3 - 0.25x_2$$

$$x_3 = -7.5 + 0.3125x_2 - 0.25x_3$$

$$x_1^{(1)} = 6.313$$

$$x_2^{(1)} = 3.522$$

$$x_3^{(1)} = -6.649$$

$$\vdots$$

$$x_1^{(6)} = 3.0214577$$

$$x_2^{(6)} = 3.9821186$$

$$x_3^{(6)} = -5.0044703$$

$$\Rightarrow \|X^{(7)} - X^{(6)}\| = 0.008$$

$$x_1^{(7)} = 3.01341$$

$$x_2^{(7)} = 3.98882$$

$$x_3^{(7)} = -5.00279$$

آنالیز خطا

نرمهای برداری و ماتریسی

تعریف: یک نرم برداری روی \mathfrak{R}^n یعنی مجموعه تمام بردارهای n بعدی با مولفه های حقیقی،

تابعی است مانند $\|\cdot\|$ از \mathfrak{R}^n بتوی \mathfrak{R}

$$\|\cdot\|: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$$

که در خواص زیر صدق می کند:

$$1- \forall X \in \mathfrak{R}^n : \|X\| > 0$$

$$2- \|X\| > 0 \text{ اگر و فقط اگر } X \neq \bar{0} .$$

$$3- \forall a \in \mathfrak{R}, X \in \mathfrak{R}^n : \|aX\| = |a| \|X\|$$

$$4- \forall X, Y \in \mathfrak{R}^n : \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

تعریف: نرمهای l_1 و l_2 و l_∞ برای بردار $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ به صورت زیر تعریف می شوند:

۱- نرم اقلیدسی :

$$\|X\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right\}^{1/2}$$

۲- نرم ماکزیمم :

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{ |x_i| \}$$

۳- نرم مطلق :

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

قضیه: به ازای هر $Y, X \in \mathfrak{R}^n, a \in \mathfrak{R}$

$$1- \|X\|_{\infty} > 0$$

$$2- \|X\|_{\infty} > 0 \text{ اگر و فقط اگر } X = \bar{0}$$

$$3- \|aX\|_{\infty} = |a| \|X\|_{\infty}$$

$$4- \|X + Y\|_{\infty} \leq \|X\|_{\infty} + \|Y\|_{\infty}$$

اثبات (۴):

$$\begin{aligned} \|X + Y\|_{\infty} &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i| + |y_i|\} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| \\ &= \|X\|_{\infty} + \|Y\|_{\infty} \end{aligned}$$

تعریف: دنباله $\{X^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ از بردارهای در \mathfrak{R}^n را نسبت به نرم $\|\cdot\|$ همگرا به x گویند اگر به ازای هر

$z > 0$ عدد صحیحی مانند $N(z)$ یافت شود به طوری که به ازای هر $k \geq N(z)$ داشته باشیم:

$$\|X^{(k)} - x\| < z$$

تعریف نرم ماتریسی

یک نرم ماتریسی بر مجموعه تمام ماتریسهای $n \times n$ حقیقی تابعی است حقیقی مانند $\|\cdot\|$ که بر این

مجموعه تعریف شده باشد و به ازای هر مقدار $a \in \mathfrak{R}$ و ماتریسهای $n \times n$ ، A و B در شرایط زیر

صدق کند:

$$1- \|A_{n \times n}\| > 0$$

$$2- \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \bar{0}$$

$$3- \forall a \in \mathfrak{R}, A_{n \times n} : \|aA\| = |a| \|A\|$$

$$4- \forall A_{n \times n}, B_{n \times n} : \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$5- \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

قضیه :

هرگاه $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد آن گاه

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

تعریف :

یک ماتریس $n \times n$ مانند $A = (a_{ij})$ را همگرا نامیم اگر

$$\forall i, j = 1(1)n : \lim_{k \rightarrow \infty} (A^k)_{ij} = 0$$

نرمهایی که معمولاً استفاده می کنیم عبارتند از:

(۱) نرم اقلیدسی (فروبینیوس):

$$F(A) = \left\{ \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2 \right\}^{1/2}$$

(۲) نرم ماکزیمم:

الف: سطری

$$\|A\|_{\infty} = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

ب) ستونی

$$\|A\|_{\infty} = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

(۳) نرم طیفی (هیلبرت)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

لم:

هرگاه $\|A\| < 1$ ، آنگاه:

$$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I \pm A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

برهان

اگر $\|A\| < 1$ طبق تعریفی در جبر خطی $r(A) < 1$ آنگاه $|I - A| \neq 0$. (چون اگر $|I - A| < 1$ آنگاه

$$|(I - A) = 0$$

یعنی $(I - A)^{-1}$ موجود است. پس داریم:

$$(I - A)^{-1}(I - A) = I_{n \times n}$$

$$I = (I - A)^{-1} - (I - A)^{-1}A$$

$$(I - A)^{-1}A = (I - A)^{-1} - I \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|(I - A)^{-1}A\| = \|(I - A)^{-1} - I\| \geq \|(I - A)^{-1}\| - 1 \\ \|(I - A)^{-1}A\| \leq \|(I - A)^{-1}\| \|A\| \end{array} \right\} \Rightarrow \|(I - A)^{-1}\| \|A\| \geq \|(I - A)^{-1}\| - 1$$

$$1 \geq \|(I - A)^{-1}\| [1 - \|A\|]$$

$$\therefore \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} \xrightarrow{\text{if } A \rightarrow -A} \|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

$$\|A\| = \|-A\|$$

آنالیز خطای روشهای مستقیم

سیستم خطی

$$AX = b \quad (1)$$

را که دارای جواب منحصر به فرد $X = A^{-1}b$ است را در نظر می گیریم. فرض می کنیم که dA

خطای درایه های ماتریس A و db خطای بردار b باشد. در این صورت جواب تقریبی \bar{X} عبارت

است از:

$$(A + dA)\bar{X} = b + db \Rightarrow \bar{X} = (A + dA)^{-1}(b + db) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bar{X} - X &= (A + dA)^{-1}(b + db) - A^{-1}b \\ &= (A + dA)^{-1}b + (A + dA)^{-1}db - A^{-1}b \\ &= [(A + dA)^{-1} - A^{-1}]b + (A + dA)^{-1}db \quad (3) \end{aligned}$$

$$\|\bar{X} - X\| \leq \|(A + dA)^{-1} - A^{-1}\| \|b\| + \|(A + dA)^{-1}\| \|db\| \quad (3)'$$

$$\|(A + dA)^{-1}\| = \|(A + dA)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}\| \leq \|(A + dA)^{-1} - A^{-1}\| + \|A^{-1}\| \quad (4)$$

با قرار دادن (4) در (3)' داریم:

$$\begin{aligned} \|\bar{X} - X\| &\leq \|(A + dA)^{-1} - A^{-1}\| \|b\| + \|(A + dA)^{-1} - A^{-1}\| \|db\| + \|A^{-1}\| \|db\| \\ &= \|(A + dA)^{-1} - A^{-1}\| * [\|b\| + \|db\|] + \|A^{-1}\| \|db\| \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(A + dA)^{-1} - A^{-1}\| &= \|A^{-1} - (A + dA)^{-1}\| = \|A^{-1} - [A(I - A^{-1}dA)]^{-1}\| \\ &= \|A^{-1} - (I - A^{-1}dA)^{-1}A^{-1}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \|I - (I - A^{-1}dA)^{-1}\| \|A^{-1}\| \\ &\leq \|I - (I - A^{-1}dA)^{-1}\| \|A^{-1}\| \\ &= \|(I - A^{-1}dA)^{-1}[I - A^{-1}dA - I]\| \|A^{-1}\| \end{aligned}$$

$$\therefore \|(A + dA)^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \|(I - A^{-1}dA)^{-1}\| \|A^{-1}dA\| \quad (6)$$

اگر فرض کنیم $\|A^{-1}dA\| < 1$ طبق لم داریم:

$$\|(I - A^{-1}dA)^{-1}\| < \frac{1}{1 - \|A^{-1}dA\|}$$

اگر عبارت فوق را در (6) قرار دهیم داریم:

$$\|(A + dA)^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A^{-1}dA\|}{1 - \|A^{-1}dA\|} \quad (7)$$

حال (7) را در (5) قرار می دهیم:

$$\|\bar{X} - X\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A^{-1}dA\|}{1 - \|A^{-1}dA\|} [\|b\| + \|db\|] + \|A^{-1}\| \|db\|$$

$$\therefore \|\bar{X} - X\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A\|}{1 - \|A^{-1}dA\|} \left(\frac{\|X\| \|dA\|}{\|A\|} + \frac{\|db\|}{\|A\|} \right) \quad (8)$$

$$\|AX\| = \|b\| \leq \|A\| \|X\|$$

$$\frac{\|\bar{X} - X\|}{\|X\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A\|}{1 - \|A^{-1}dA\|} \left(\frac{\|X\| \|dA\|}{\|A\| \|X\|} + \frac{\|db\|}{\|A\| \|X\|} \right) \quad (9)$$

$$\frac{\|\bar{X} - X\|}{\|X\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}dA\|} \left(\frac{\|dA\|}{\|A\|} + \frac{\|db\|}{\|b\|} \right) \quad (10)$$

حال اگر $\text{cond}(A)$ نزدیک به عدد یک باشد سیستم را خوش وضع و اگر $\text{cond} \gg 1$ سیستم را بدوضع می نامند.

با توجه به رابطه (10) نتیجه می گیریم که خطای نسبی در بردار جواب X با خطای نسبی درایه های A و b در ارتباط است. چنان چه عدد حالت بسیار بزرگتر از یک باشد (در عمل بیشتر از ۱۰) در اینصورت کوچکترین تغییراتی در b یا A بزرگترین تغییرات را در بردار جواب ایجاد می کند. در این صورت جوابهای حاصله با خطای زیادی همراه هستند و قابل اطمینان نیستند. لذا سیستم را سیستم بدوضع می نامند.

چنانچه عدد حالت نزدیک و کوچکتر از یک باشد در اینصورت با توجه به (10) هرگونه تغییرات در A و b تغییر آنچنانی در بردار جواب نمی دهد. لذا سیستم را سیستم خوش وضع می نامند. در عمل استفاده از تعریف عدد حالت به خاطر این که به دست آوردن معکوس ماتریس A چنان چه ابعاد آن بسیار بزرگ باشد مقدور نیست، مرسوم نیست لذا می توان معیارهای دیگری را جهت بررسی کردن خوش وضعی و بدوضعی یک سیستم عملاً به کار برد. یکی از این معیارها این است که اگر میانگین

درایه های ماتریس نسبت به دترمینان آن ماتریس بسیار بزرگ باشد در این صورت سیستم را بدوضع می نامیم. همچنین می توان از معیار بررسی نیومن استفاده کرد که عبارت است از:

$$\text{cond} (A) = \sqrt{\left| \frac{I_{\max}}{I_{\min}} \right|}$$

I_{\min} کوچکترین مقدار ویژه و I_{\max} بزرگترین مقدار ویژه ماتریس است. چنان چه نسبت این دو مقدار ویژه بسیار بزرگ باشد سیستم را بدوضع می نامند. اما از لحاظ عملی چنان چه سیستم بسیار بزرگ باشد به کار بردن معیارهای فوق الذکر عملاً مقدور نیست، لذا می توان سیستم فوق را بایک الگوریتم و با معیار دقت t رقم اعشار محاسبه نمود و سپس همین الگوریتم را با معیار دقت دو برابر محاسبه نمود. چنان چه جوابهای هر دو حالت نزدیک هم باشند سیستم را خوش وضع می نامیم در غیر این صورت سیستم را بدوضع می نامیم.

نتایج:

الف) اگر فرض کنیم که در بردار b هیچ خطایی وجود نداشته باشد (یعنی $db=0$) آنگاه خطای نسبی عبارت است از:

$$\frac{\|\bar{X} - X\|}{\|X\|} \leq \frac{\text{cond}(A) \cdot \|dA\|}{1 - \|A^{-1}dA\|} \cdot \frac{\|dA\|}{\|A\|}$$

ب) اگر فرض کنیم که در درایه های ماتریس A خطایی وجود نداشته باشد (یعنی $dA=0$) در این صورت خطای نسبی برابر است با:

$$\frac{\|\bar{X} - X\|}{\|X\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|db\|}{\|b\|}$$

مثال

بد وضعی یا خوش وضعی دستگاه های زیر را بررسی کنید.

$$41x_1 + 40x_2 = 81 \quad (1)$$

$$40x_1 + 39x_2 = 79$$

$$2.0000x_1 + 0.6667x_2 = 2.0000 \quad (2)$$

$$1.0000x_1 + 0.3333x_2 = 1.0000$$

حل:

جواب دستگاه (1) عبارت است از:

$$x_1 = x_2 = 1$$

در حالی که میانگین درایه ها ۴۰ و دترمینان ماتریس ضرایب ۱- است. یعنی سیستم بدوضع است.

چون اگر $81 \rightarrow 80.99$ و $79 \rightarrow 79.01$ جواب دستگاه $x_1 = 1.79, x_2 = 0.19$ می شود. یعنی

کوچکترین تغییر در b باعث بزرگترین تغییر در بردار جواب می گردد.

برای دستگاه (2) جوابها عبارتند از:

$$x_1 = 1.0000$$

$$x_2 = 0$$

حال با تغییر ۰،۶۶۶۷ به ۰،۶۶۶۶، جوابها به

$$x_1 = 1 - 0.333k$$

$$x_2 = k$$

تغییر می یابند. همچنین دترمینان ماتریس به صفر تقلیل می یابد. پس سیستم بدوضع است.

آنالیز همگرایی روشهای تکراری

سیستم خطی ذیل مفروض است. چنان چه روشهای تکراری را جهت حل آن به کار بگیریم

$$AX = b$$

$$X^{(k)} = HX^{(k-1)} + C \quad k=1,2,3,\dots \quad (1)$$

$X^{(k)}$ جواب تقریبی است که با استفاده از روش تکراری پس از k مرتبه تکرار محاسبه شده است و

X جواب واقعی سیستم است. در این جا ما درصدد بررسی رفتار جواب سیستم فوق هستیم.

از آنجا که X جواب واقعی سیستم است پس در رابطه تکراری فوق صدق می کند.

$$X = HX + C \quad (2)$$

اگر (2) را از (1) کم کنیم:

$$X^{(k)} - X = H(X^{(k-1)} - X) \quad k=1,2,\dots$$

$$X^{(k)} = HX^{(k-1)} \quad k=1,2,\dots$$

$$X^{(1)} = HX^{(0)}$$

$$X^{(2)} = HX^{(1)} = H^2X^{(0)}$$

\vdots

$$X^{(k)} = H^k X^{(0)} \quad (3)$$

با توجه به رابطه (۳) می توان دریافت که اگر k افزایش یابد یا به عبارتی $\infty \rightarrow k$ برای این که خطا به سمت صفر میل کند لازم است که ماتریس H^k به سمت صفر میل نماید. جهت بررسی همگرایی فرض می کنیم که ماتریس تکراری H در هر مرحله تکرار ثابت باشد. حال جهت اثبات همگرایی روشهای تکراری ابتدا چند لم و قضیه زیر را در نظر می گیریم و سپس قضایای همگرایی را اثبات می کنیم.

لم ۱: برای هر نرم $\|\cdot\|_p$ داریم:

$$r(A) \leq \|A\|_p$$

اثبات)

فرض می کنیم I, X مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر با آن برای ماتریس A باشند. پس داریم:

$$Ax = Ix$$

$$\|Ix\|_p = \|I\| \|x\| = \|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p$$

$$\therefore \|I\| \|x\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p \Rightarrow \|I\| \leq \|A\|_p$$

برای هر مقدار ویژه ای از جمله شعاع طیفی.

قضیه ۱:

ماتریس $A_{n \times n}$ مفروض است آنگاه $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ اگر $\|A\| < 1$ و اگر و فقط اگر $r(A) < 1$.

برهان قسمت اول:

$$\text{if } \|A\| < 1 \Rightarrow \|A^k\| \leq \|A\|^k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|A\|^k \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} A^k \right\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$$

برهان قسمت دوم:

برای آسانی کار فرض می کنیم تمام مقادیر ویژه ماتریس مورد نظر مجزا و حقیقی باشند آنگاه یک

تبدیل متشابه ساز مانند S یافت می شود به طوری که ماتریس را به ماتریسی قطری مثل D تبدیل می

کند به صورتی که تمام مقادیر ویژه ماتریس مورد نظر روی قطر اصلی ماتریس D قرار دارد. یعنی:

$$D = \begin{bmatrix} I_1 & & & 0 \\ & I_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & I_n \end{bmatrix}$$

\Rightarrow :

$$A^2 = (S^{-1}DS)^2 = (S^{-1}DS)(S^{-1}DS) = S^{-1}D^2S$$

\vdots

$$A^k = S^{-1}D^kS$$

$$\Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} I_1^k & & & \\ & I_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_n^k \end{bmatrix}$$

$$\text{if } r(A) < 1 \quad \text{in}(1) \Rightarrow |I_i| < 1 \quad i=1,2,3,\dots$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = S^{-1} \lim_{k \rightarrow \infty} D^k S \rightarrow 0$$

\Leftarrow :

$$\text{if } \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} S^{-1}D^kS = 0 \xrightarrow{S^{-1}, S \neq 0} \lim_{k \rightarrow \infty} D^k = 0$$

$$\equiv |I_i| < 1 \quad i=1(1)n \Rightarrow \max |I_i| < 1$$

قضیه ۲:

سری نامتناهی $I + A + A^2 + A^3 + \dots$ به $(I - A)^{-1}$ همگراست اگر $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ (این سری به سری

نیومن معروف است).

اثبات) با توجه به قضیه فوق نتیجه می گیریم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \xrightarrow{\text{theorem}} r(A) < 1 \Rightarrow |I - A| \neq 0$$

یعنی $(I - A)^{-1}$ موجود است.

$$(I + A + A^2 + \dots + A^k)(I - A) = I - A^{k+1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (I + A + A^2 + \dots + A^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (I - A^{k+1})(I - A)^{-1}$$

$$\xrightarrow{A^k \rightarrow 0} I + A + A^2 + \dots = (I - 0)(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}$$

قضیه همگرایی ۱:

روش تکراری $X^{(k)} = HX^{(k-1)} + C \quad k=1,2,\dots$ که برای حل سیستم $AX = b$ به کار گرفته می

شود علیرغم هر تقریب اولیه ای به مقدار واقعی جواب همگراست اگر $\|H\| < 1$.

برهان:

بدون خلل به کلیت مسئله اگر بردار تقریب اولیه $X^{(0)} = (0, 0, \dots, 0) = \bar{0}$ را انتخاب کنیم داریم:

$$k=1 \quad X^{(1)} = C$$

$$k=2 \quad X^{(2)} = HX^{(1)} + C = HC + C = (H + I)C$$

$$k=3 \quad X^{(3)} = HX^{(2)} + C = H((H + I)C) + C = (H^2 + H + I)C$$

⋮

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (H^{k-1} + H^{k-2} + \dots + H + I)C$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = (I - H)^{-1} C \quad (B)$$

حالت ۱) اگر روش تکراری ژاکوبی باشد:

$$H_j = -D^{-1}(L + U) \quad ; \quad C_j = D^{-1}b$$

و با قرار دادن این عبارت در (B) داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} &= (I + D^{-1}(U + L))^{-1} D^{-1} b \\
&= [D^{-1}(D + (U + L))]^{-1} D^{-1} b \\
&= (D^{-1} A)^{-1} D^{-1} b \\
&= A^{-1} D D^{-1} b \\
&= A^{-1} b \\
&= X \\
\overset{*}{\longrightarrow} \lim_{k \rightarrow \infty} z^{(k)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} H^k z^{(0)} \xrightarrow{\|H\| < 1} 0
\end{aligned}$$

حالت ۲) اگر روش تکراری گاوس - سایدل باشد:

$$H_g = -(L + D)^{-1} U \quad ; \quad C_g = (L + D)^{-1} b$$

با قرار دادن این عبارت در (B) داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} &= (I + (L + D)^{-1} U)^{-1} (L + D)^{-1} b \\
&= ((L + D)^{-1} (L + D + U))^{-1} (L + D)^{-1} b \\
&= A^{-1} (L + D) (L + D)^{-1} b = X \\
\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} z^{(k)} &\rightarrow 0
\end{aligned}$$

حالت ۳) اگر روش تکراری SOR باشد:

$$H_w = (D + wL)^{-1} [(1 - w)D - wU] \quad ; \quad C_w = w(D + wL)^{-1} b$$

با جایگذاری در عبارت (B) داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} &= (I - (D + wL)^{-1} [(1 - w)D - wU])^{-1} w(D + wL)^{-1} b \\
&= \{(D + wL)^{-1} [D + wL - (1 - w)D + wU]\}^{-1} w(D + wL)^{-1} b \\
&= A^{-1} (D + wL) (D + wL)^{-1} b = X \\
\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} z^{(k)} &\rightarrow 0
\end{aligned}$$

قضیه همگرایی ۲:

شرط لازم و کافی برای آنکه یک روش تکراری به فرم $X^{(k)} = HX^{(k-1)} + C$ $k=1,2,\dots$ همگرا

باشد آن است که مقادیر ویژه ماتریس تکراری H در رابطه زیر صدق کند:

$$|I_i(H)| < 1 \quad ; \quad i=1,2,\dots$$

برهان:

فرض کنیم ماتریس تکراری H دارای n مقدار ویژه متمایز I_1, I_2, \dots, I_n باشد. اگر $z^{(0)}$ خطا در تقریب اولیه این روش باشد از آنجا که مقادیر ویژه مجزا هستند نتیجه می گیریم که تمام بردارهای ویژه متناظر این مقادیر X_1, X_2, \dots, X_n مستقل خطی هستند و تشکیل فضای برداری می دهند. یعنی هر بردار در این فضا را می توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای مستقل خطی نوشت:

$$z^{(0)} = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n \quad C_i, X_i \neq 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} H z^{(0)} &= C_1 H X_1 + C_2 H X_2 + \dots + C_n H X_n \xrightarrow{HX=IX} \\ &= C_1 I_1 X_1 + C_2 I_2 X_2 + \dots + C_n I_n X_n \end{aligned}$$

$$H^2 z^{(0)} = C_1 I_1^2 X_1 + C_2 I_2^2 X_2 + \dots + C_n I_n^2 X_n$$

⋮

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H^k z^{(0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (C_1 I_1^k X_1 + \dots + C_n I_n^k X_n) \quad (2)$$

$$\text{if } \lim_{k \rightarrow \infty} H^k \rightarrow 0 \quad \text{or} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} z^{(k)} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \text{because } X_i, C_i \neq 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} I_i^k = 0 \quad i=1(1)n$$

$$\Leftrightarrow |I_i| < 1 \quad i=1(1)n$$

تعریف:

فرض می کنیم v سرعت همگرایی روشهای تکراری باشد در این صورت می توان v را به صورت زیر تعریف نمود:

$$v = -\log r(H)$$

از این تعریف نتیجه می گیریم که تعداد مراحل تکرار لازم با نرخ همگرایی نسبت معکوس دارد. یعنی هر چقدر شعاع طیفی ماتریس H کوچکتر باشد تعداد مراحل کمتر و مرتبه همگرایی بیشتر می شود.

مثال ۱:

سیستم را به روش SOR تا دو مرحله حل کرده و سرعت همگرایی آن را بیابید.

$$\begin{cases} 3x+2y = 4.5 \\ 2x+3y-z = 5 \\ -y+2z = -0.5 \end{cases}$$

راهنمایی: ماتریس ضرایب متقارن، سه قطری است. ثابت می کنیم معین مثبت است. یعنی:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2(x^2 + 2xy + y^2) + x^2 + z^2 + (z-y)^2 > 0$$

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - r^2(H)}} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{7}{18}}}$$

$$H_j = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |H_j - I| = 0 \equiv \begin{cases} I_1 = 0 \\ I_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{11}{18}} \end{cases} \Rightarrow r^2(H_j) = \frac{11}{18}$$

قضیه: اگر سیستم خطی $AX = b$ اکیدا غالب قطری باشد آنگاه روش تکراری ژاکوبی همواره

همگراست.

برهان: طبق تعریف (غالب قطری) داریم:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \text{or} \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \quad (*)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad H = -D^{-1}(L+U)$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & \\ & \frac{1}{a_{22}} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$L+U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H = - \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1,n-1}}{a_{11}} & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \vdots & & & & \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 & \end{bmatrix}$$

حال کافی است که نرم ماکزیمم سطری ماتریس H را حساب کنیم که:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$$

می شود که طبق (*) کمتر از یک می باشد. یعنی:

$$\|H\| < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} H^k = 0 \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} z^k = 0$$

یعنی این روش (ژاکوبی) همگراست.

مثال ۲:

فرض کنیم ماتریس A به صورت $A = B - C$ داده شده است که در آن A و B و C

نامفرد هستند. همچنین $m=1,2,\dots$ $BX^{(m)} = CX^{(m-1)} + Y$ مفروض است. شرط لازم و کافی برای

آن که $\lim_{m \rightarrow \infty} X^{(m)} = A^{-1}Y$ چیست؟

حل:

$$X^{(m)} = B^{-1}CX^{(m-1)} + B^{-1}Y \quad \text{if } B^{-1}C = H, B^{-1}Y = d$$

$$m=1 \quad X^{(1)} = HX^{(0)} + d \Leftrightarrow$$

$$m=2 \quad X^{(2)} = HX^{(1)} + d = H(HX^{(0)} + d) + d = H^2 X^{(0)} + (H+I)d \Leftrightarrow$$

\vdots

$$X^{(m)} = H^m X^{(0)} + (H^{m-1} + H^{m-2} + \dots + I)d$$

حال اگر فرض کنیم

$$\|H\| = \|B^{-1}C\| < 1 \quad (*)$$

در این صورت

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (B^{-1}C)^m = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X^{(m)} = (B^{-1}(B-C))^{-1}d \Leftrightarrow$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X^{(m)} = A^{-1}Bd = A^{-1}Y$$

یعنی شرط لازم و کافی همان (*) می باشد.

قضیه: اگر ماتریس ضرایب سیستم $AX = b$ اکیدا غالب قطری باشد آن گاه روش گاوس-سایدل

برای هر $X^{(0)}$ همگراست.

اثبات

$$e^{(k)} = X + (L+D)^{-1}U - (L+D)^{-1}b$$

$$\|e^{(k)}\| = \left\| -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} e_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} e_j^{(k-1)} \right\|$$

$$\|e^{(k)}\| \leq \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \|e_j^{(k)}\| + \sum_{j=i+1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \|e_j^{(k-1)}\|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}\right) \|e^{(k)}\| \leq \sum_{j=i+1}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \|e^{(k-1)}\| \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} + \sum_{j=i+1}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \|e^{(k)}\| < \|e^{(k-1)}\| < \dots < \|e^{(0)}\|$$

یعنی این روش (گائوس - سایدل) همگراست.

فصل دوم

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

سیستم خطی زیر

$$AX=b$$

را در نظر بگیرید که در آن $b \neq 0$ باشد در این حالت سیستم را ناهمگن و در غیر این صورت سیستم را همگن می خوانند. اگر سیستم همگن باشد و $\det(A) \neq 0$ ، آنگاه تنها جواب دستگاه می تواند جواب بدیهی ($X=0$) باشد. ولی هرگاه سیستم ناهمگن فوق دارای $\det A \neq 0$ باشد سیستم دارای جواب منحصر به فرد $X=A^{-1}b$ است. یافتن جواب غیر صفر برای سیستم همگن منجر به مسئله بردارهای ویژه و مقادیر ویژه می گردد. بدین منظور باید داشته باشیم:

$$\det(A - I\lambda) = 0$$

که عبارت بالا چند جمله ای از درجه n بر حسب λ است. یعنی:

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

با حل این معادله تمام ریشه های آن ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$) به دست می آیند که همان مقادیر ویژه ماتریس مورد نظر می باشند.

روشهای مستقیمی که ابتدا چند جمله ای ویژه می یابند و سپس با حل ریشه های چند جمله ای می توان مقادیر ویژه را یافت عبارتند از روش بسط دترمینان، روش برداری و روش فادیو لوریرو و ... این روشها را می توان با استفاده از مثال زیر بررسی نمود.

مثال:

ماتریس A مفروض است. ابتدا مقادیر ویژه را با استفاده از روش بسط دترمینان به دست می آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل به روش بسط دترمینان:

$$\det(A - I) = \begin{vmatrix} 1-I & 2 & 3 \\ 2 & 3-I & 1 \\ 3 & 1 & 2-I \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-I)[(3-I)(2-I)-1] + 2(3-2(2-I)) + 3(2-3(3-I)) = 0$$

$$P_3(I) = -I^3 + 6I^2 + 3I - 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 6 \\ I_{2,3} = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

این مثال را با روش برداری حل می کنیم. روش برداری مبتنی بر استفاده از قضیه کیلی - هامیلتون در جبر خطی است که بیان می کند هر ماتریس در چند جمله ای مشخصه خود صدق می کند. بنابراین چند جمله ای مشخصه آن برای مثال فوق عبارت است از:

$$P_3(I) = -I^3 + a_1 I^2 - a_2 I + a_3$$

طبق قضیه کیلی - هامیلتون ماتریس A در رابطه فوق صدق می کند. یعنی:

$$P_3(A) = -A^3 + a_1 A^2 - a_2 A + a_3 I = 0$$

حال اگر یک بردار دلخواه ناصفر مانند $Y = [1, 0, 0]^T$ را انتخاب کنیم و در رابطه فوق ضرب نماییم داریم:

$$-A^3 Y + a_1 A^2 Y - a_2 A Y + a_3 Y = \bar{0}$$

رابطه فوق یک دستگاه سه معادله و سه مجهول است که در آن مجهولات a_3, a_2, a_1 هستند. با حل این دستگاه

$$a_3 = -18, a_2 = -3, a_1 = 6$$

می باشند. لذا چند جمله ای مشخصه را می توان به فرم زیر یافت.

$$P_3(I) = -I^3 + 6I^2 + 3I - 18 = 0$$

هدف دو روش فوق این است که به طرق مختلف چندجمله ای مشخصه را می یابند و با حل چندجمله

ای مشخصه مقادیر ویژه را به دست می دهند که از لحاظ محاسباتی مقرون به صرفه نیستند.

یکی دیگر از روشهای مستقیمی که برای تعیین مقادیر ویژه به کار می رود روش فادیو لوریر است که

به شرح آن می پردازیم.

روش فادیو لوریر:

این روش با استفاده از اثر ماتریس چندجمله ای مشخصه را محاسبه و با حل این چندجمله ای مقادیر

ویژه را به دست می دهد. اثر ماتریس عبارت است از:

$$tr(A_{n \times n}) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

چنان چه فرض کنیم ماتریس A یک ماتریس n بعدی باشد آنگاه معادله مشخصه این ماتریس را به

صورت زیر در نظر می گیریم:

$$P_n(I) = (-1)^n I^n + a_1 I^{n-1} + \dots + a_{n-1} I + a_n$$

طبق الگوریتم این روش ماتریس های جدید به شرح زیر ساخته می شوند:

$$B_1 = A \quad \Rightarrow \quad a_1 = tr(B_1)$$

$$B_2 = A(B_1 - a_1 I) \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2} tr(B_2)$$

$$B_3 = A(B_2 - a_2 I) \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{3} tr(B_3)$$

⋮

$$B_n = A(B_{n-1} - a_{n-1} I) \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{n} tr(B_n)$$

حال با تعیین شدن ضرایب چندجمله ای و جایگزینی آن، معادله مشخصه تعیین می شود. با حل این چندجمله ای مقادیر ویژه را می یابیم.

مثال

تمام مقادیر ویژه ماتریس A را توسط روش فادیو لوریر بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل:

$$P_3(I) = (-1)^3 I^3 + a_1 I^2 + a_2 I + a_3 = 0$$

$$B_1 = A \Rightarrow a_1 = \text{tr}(B_1) = 1 + 3 + 2 = 6$$

$$B_2 = A(B_1 - a_1 I) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-6 & 2 & 3 \\ 2 & 3-6 & 1 \\ 3 & 1 & 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -7 \\ -1 & -4 & 5 \\ -7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a_2 = \text{tr}(B_2) = \frac{1}{2}(8 - 4 + 2) = 3$$

$$B_3 = A(B_2 - a_2 I) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8-5 & -1 & -7 \\ -1 & -4-3 & 5 \\ -7 & 5 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a_3 = \text{tr}(B_3) = \frac{1}{3}(-18 - 18 - 18) = -18$$

$$\therefore P_3(I) = -I^3 + 6I^2 + 3I - 18 = 0$$

حال کافی است که معادله بالا حل گردد و مقادیر ویژه به دست آید.

مزیت روش لوریر بر روشهای بسط دترمینان و برداری در این است که در روش لوریر ضرایب راحت تر به دست می آیند.

قضیه ۱:

ماتریس های A و A^T دارای مقادیر ویژه یکسان و بردارهای ویژه متعامد هستند.

اثبات:

چون $\det(A) = \det(A^T)$ پس دارای چند جمله ایهای یکسانی هستند یعنی مقادیر ویژه یکسان دارند. حال فرض می کنیم ماتریس A دارای n مقدار ویژه I_i مجزا باشد و u_i بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه آن باشد و فرض می کنیم ماتریس A^T دارای مقادیر ویژه I_j و بردارهای ویژه v_j باشد. طبق تعریف مقدار ویژه داریم:

$$Au_i = I_i u_i \quad i=1(1)n \quad (1)$$

$$A^T v_j = I_j v_j \quad j=1(1)n \quad (2)$$

$$v_j^T A = I_j v_j^T \quad j=1(1)n \quad (3)$$

$$v_j^T Au_i = I_j v_j^T u_i \quad (4)$$

$$v_j^T Au_i = I_i v_j^T u_i \quad (5)$$

$$\xrightarrow{(4),(5)} I_j v_j^T u_i = I_i v_j^T u_i$$

$$\Rightarrow (I_j - I_i) v_j^T u_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{if } i \neq j & v_j^T u_i = 0 \\ \text{if } i = j & v_j^T u_i \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

از آنجا که مولفه های بردارهای ویژه پارامتری هستند لذا می توان مولفه های u و v را طوری انتخاب کرد که:

$$v_j^T u_i = 1 \quad (8)$$

$$\xrightarrow{(7),(8)} v_j^T u_i = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases}$$

و این همان متعامد بودن بردارهای ویژه A و A^T است.

قضیه ۲:

مقادیر ویژه A و A^{-1} نسبت به هم معکوس هستند اما بردارهای ویژه یکسانی دارند.

اثبات:

فرض کنیم I_i و u_i به ترتیب مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A باشند. پس داریم:

$$\begin{aligned} Au_i &= I_i u_i & i=1(1)n \\ \xrightarrow{\text{there is } A^{-1}} u_i &= I_i A^{-1} u_i & ; \text{ because } A^{-1} \text{ is: } \det(A) = I_1 I_2 \cdots I_n \neq 0 \Rightarrow I_i \neq 0 \forall i \\ A^{-1} u_i &= \frac{1}{I_i} u_i \end{aligned}$$

یعنی مقادیر ویژه ماتریس A^{-1} معکوس مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

تعریف:

ماتریس A و B را دو ماتریس متشابه گوئیم هرگاه یک ماتریس نامنفرد نظیر S چنان بیابیم که:

$$A = S^{-1} B S$$

در این رابطه B تحت متشابه ساز S و متشابه A می باشد.

نتیجه:

دو ماتریس متشابه دارای دترمینانهای یکسانی هستند. چون:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(S^{-1}) \det(B) \det(S) \\ &\Rightarrow \det(A) = \det(B) \\ \det(S^{-1}) \det(S) &= 1 \end{aligned}$$

قضیه گرشکورین:

شعاع طیفی یک ماتریس نمی تواند از نرم سطری ستونی آن تجاوز کند. یعنی:

$$r(A) \leq \|A\|$$

اثبات ۱:

$$\begin{aligned} AX &= I X \\ \|AX\| &= \|I X\| \\ \|AX\| &= \|I\| \|X\| \\ \|I\| \|X\| = \|AX\| \leq \|A\| \|X\| &\Rightarrow \|A\| \|X\| \geq \|I\| \|X\| \xrightarrow{\|X\| \neq 0} \|I\| < \|A\| \end{aligned}$$

اثبات ۲:

$$AX_i = I_i X_i \quad i=1(1)n \quad X_i = (X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,n})$$

$$a_{11} X_{i,1} + a_{12} X_{i,2} + \dots + a_{1n} X_{i,n} = I_i X_{i,1}$$

$$a_{21} X_{i,1} + a_{22} X_{i,2} + \dots + a_{2n} X_{i,n} = I_i X_{i,2}$$

⋮

$$a_{n1} X_{i,1} + a_{n2} X_{i,2} + \dots + a_{nn} X_{i,n} = I_i X_{i,n}$$

اگر فرض کنیم که $|X_{i,k}| = \max_r |X_{i,r}|$ باشد رابطه k ام را در نظر می گیریم:

$$a_{k1} X_{i,1} + a_{k2} X_{i,2} + \dots + a_{kk} X_{i,k} + \dots + a_{kn} X_{i,n} = I_i X_{i,k}$$

$$a_{k1} \frac{X_{i,1}}{X_{i,k}} + a_{k2} \frac{X_{i,2}}{X_{i,k}} + \dots + a_{kk} + \dots + a_{kn} \frac{X_{i,n}}{X_{i,k}} = I_i \quad i=1(1)n$$

$$|I_i| \leq |a_{k1}| \left| \frac{X_{i,1}}{X_{i,k}} \right| + |a_{k2}| \left| \frac{X_{i,2}}{X_{i,k}} \right| + \dots + |a_{kk}| + \dots + |a_{kn}| \left| \frac{X_{i,n}}{X_{i,k}} \right| \quad i=1(1)n \quad (1)$$

با توجه به فرض فوق داریم که

$$\left| \frac{X_{i,r}}{X_{i,k}} \right| < 1 \quad \forall r \quad (2)$$

با استفاده از رابطه (۱) نتیجه می گیریم که:

$$|I_i| \leq |a_{k1}| + |a_{k2}| + \dots + |a_{kk}| + \dots + |a_{kn}| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| \quad (3)$$

این عبارت همان تعریف نرم سطری است. حال طبق قضیه ۱ اگر جای سطر و ستونها عوض شود مقادیر

ویژه تغییر نمی کند. پس برای نرم ستونی هم رابطه برقرار است.

قضیه برآور:

برای ماتریس $A_{n \times n}$ ، هرگاه P_k حاصلجمع قدر مطلق عناصر سطر k ام به جز درایه روی قطر باشد

آنگاه تمام مقادیر ویژه $A_{n \times n}$ داخل یا روی یکی از دوایر زیر

$$|I - a_{kk}| \leq P_k \quad k=1(1)n$$

قرار دارند.

برهان:

با استفاده از رابطه (3) در قضیه گرشگورین داریم:

$$|I_i| \leq |a_{k1}| + |a_{k2}| + \dots + |a_{kk}| + \dots + |a_{kn}| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$$

$$|I_i| - |a_{kk}| \leq |a_{k1}| + |a_{k2}| + \dots + |a_{k,k-1}| + \dots + |a_{kn}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|$$

از رابطه فوق می توان نتیجه گرفت که:

$$|I_i - a_{kk}| \leq |a_{k1}| + |a_{k2}| + \dots + |a_{k,k-1}| + |a_{k,k+1}| + \dots + |a_{kn}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| = P_k$$

مثال (کاربرد قضیه براور):

حدود مقادیر ویژه ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ابتدا دوایر ستونی را در نظر می گیریم. از آنجا که ماتریس مقارن است اجتماع دوایر سطری و ستونی

برهم منطبق اند.

$$|I - 1| \leq 5$$

∪

$$|I - 3| \leq 3 \quad \Rightarrow \quad |I - 1| \leq 5$$

∪

$$|I - 2| \leq 4$$

(شکل)

در انتها می بینیم که باید مقادیر ویژه درون یا روی دایره ای به شعاع ۵ و مرکز ۱ قرار داشته باشند. لذا با توجه به این که قبلا مقادیر ویژه این ماتریس را یافته ایم و شعاع طیفی آن ۶ می باشد مقادیر ویژه نمی تواند از اجتماع دوایر فوق خارج گردد.

روشهای تکراری برای تعیین مقادیر ویژه یک ماتریس

از روشهای تکراری می توان به روش توانی یا توان رسانی (*Power Method*) اشاره کرد.

این روش در هر مرحله بزرگترین مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر با آن را با معیار دقت مورد نظر تعیین می کند. برای آسانی کار فرض می کنیم که تمام مقادیر ویژه مجزا و حقیقی باشند و به صورت زیر مرتب شده باشند:

$$|I_1| > |I_2| > \dots > |I_n|$$

در مرحله اول یک بردار دلخواه ناصفر مانند $v^{(0)}$ را انتخاب می کنیم و در ماتریس مورد نظر ضرب می کنیم. یعنی:

$$v^{(0)} \in \mathfrak{R}^n : v^{(0)} = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

$$Av^{(0)} = c_1 Av_1 + c_2 Av_2 + \dots + c_n Av_n \quad ; \quad Av_i = I_i v_i \quad i=1(1)n$$

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= Av^{(0)} = c_1 I_1 v_1 + c_2 I_2 v_2 + \dots + c_n I_n v_n \\ &= I_1 [c_1 v_1 + c_2 \frac{I_2}{I_1} v_2 + \dots + c_n \frac{I_n}{I_1} v_n] \end{aligned}$$

$$v^{(2)} = Av^{(1)} = I_1^{-2} [c_1 v_1 + c_2 (\frac{I_2}{I_1})^2 v_2 + \dots + c_n (\frac{I_n}{I_1})^2 v_n]$$

⋮

$$v^{(k)} = Av^{(k-1)} = I_1^{-k} [c_1 v_1 + c_2 (\frac{I_2}{I_1})^k v_2 + \dots + c_n (\frac{I_n}{I_1})^k v_n]$$

$$v^{(k+1)} = Av^{(k)} = I_1^{-k-1} [c_1 v_1 + c_2 (\frac{I_2}{I_1})^{k+1} v_2 + \dots + c_n (\frac{I_n}{I_1})^{k+1} v_n]$$

$$I_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{v^{(k+1)}}{v^{(k)}})_r$$

$$\text{if } k \rightarrow \infty \Rightarrow \left| \frac{I_i}{I_1} \right| < 1 \quad i = 2(1)n \Rightarrow v^{(k)} = I_1^{-k} c_1 v_1$$

در هر مرحله اگر بردارهای حاصله را نرمال سازیم یعنی هر بردار را بر نرم ماکزیمم آن تقسیم کنیم این عمل باعث می شود که در مرحله پایانی به جای اینکه I_1^k را به دست آوریم تنها I_1 را می یابیم. از طرف دیگر با نرمال سازی نتیجه می گیریم که درایه های $v^{(k)}$ ها همه کوچکتر از یک می شوند. این عمل باعث جلوگیری از حجم بزرگ عدد در ضربهای متوالی می گردد و باعث مهار خطای *Round off* می شود.

ضمناً سرعت همگرایی این روش بستگی به نسبت $\frac{I_i}{I_1}$ ($i = 2(1)n$) دارد. هرچه این نسبت کمتر باشد سرعت همگرایی بیشتر می شود.

برای مرحله بعد ماتریسی را معرفی می کنیم که I_2 بزرگترین مقدار ویژه اش باشد. لازم است که بردار v_1 حاصله را در مرحله قبل بر اولین مولفه اش تقسیم کنیم. در نتیجه اولین مولفه v_1 یک می گردد.

همچنین فرض می کنیم که مولفه اول v_2 نیز یک باشد. حال تعریف می کنیم:

$$\Delta v = v_1 - v_2$$

اگر فرض کنیم a_1 سطر اول ماتریس A باشد ماتریس A_1 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A_1 = A - v_1 a_1$$

بدین طریق سطر اول ماتریس A_1 صفر است.

حال نشان می دهیم که Δv و I_2 به ترتیب بردار ویژه و بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A_1 هستند.

$$\begin{aligned} A_1 \Delta v &= (A - v_1 a_1)(v_1 - v_2) \\ &= Av_1 - Av_2 - v_1(a_1 v_1 - a_1 v_2) \\ &= I_1 v_1 - I_2 v_2 - v_1(I_1(1) - I_2(1)) \\ &= I_2(v_1 - v_2) \\ &= I_2 \Delta v \end{aligned}$$

با توجه به تعریف A_1 می دانیم که سطر اول A_1 همه صفر هستند و با توجه به رابطه فوق نتیجه می

گیریم که به علت صفر بودن اولین مولفه Δv ستون اول A_1 همه از مرحله عملیات خارج می شوند. لذا

نتیجه می گیریم که اگر ماتریس A_1 را در نظر بگیریم و از اولین سطر و ستون آن صرف نظر کنیم یک

ماتریس با بعد $n-1$ را خواهیم داشت که بزرگترین مقادیر ویژه آن I_2 است. حال روند فوق را روی

ماتریس حاصله تکرار می کنیم.

مثال:

بزرگترین مقدار ویژه ماتریس زیر را با روش توانی به دست آورید. ($\epsilon = 10^{-2}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل:

ابتدا برداری دلخواه اما ناصفر انتخاب می کنیم.

$$V^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V^{(1)} = AV^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$V^{(1)_{normal}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V^{(2)} = AV^{(1)_{normal}} = \begin{bmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{11}{3} \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

$$V^{(2)_{normal}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{11}{14} \\ \frac{11}{14} \end{bmatrix}$$

⋮

تعداد مراحل	0	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$V^{(k)}$	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{69}{75}$.993120	1	0.999424	0.999195	1
نرمال	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{72}{75}$	945	.99653	0.998271	0.999209	0.999832	1
شده	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{72}{75}$	954		0.998281	1	1	1
		1	$\frac{11}{14}$	1						
$V^{(k)}$		1	$\frac{14}{3}$	$\frac{69}{14}$		5.89750	5.98618	5.991385	5.992658	
نرمال		2	$\frac{11}{3}$	$\frac{72}{14}$	438	5.91780	5.97583	5.990094	5.996476	
نشده		3	$\frac{11}{3}$	$\frac{72}{14}$	$\frac{429}{75}$	5.93835	5.975890	5.994833	5.997481	
			$\frac{11}{3}$	$\frac{72}{14}$	$\frac{429}{75}$					
بزرگترین		3	4.6	5.357142	840	5.93835	5.98618	5.994833	5.997481	
I در هر										
مرحله										
تکرار										

$$A_1 = A - V_1 a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A^* - I I| = \begin{vmatrix} 1-I & -2 \\ -1 & -1-I \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow I_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

تمرین: بزرگترین مقادیر ویژه ماتریس زیر را تا دو مرحله توسط روش توانی تعیین کنید. ضمناً بردار

دلخواه اولیه $X^{(0)} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ می باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

تمرین: فرض کنیم $P_n(I) = \det(A_n - I I), A_n =$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ 0 & a & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ & & & & a_{n-2} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & & a_1 \end{bmatrix}$$

$$P_n(I) = (a - I)P_{n-1}(I) - a_n^2(a - I)^{n-2} - 1$$

$$P_1(I) = a_1 - I - 2$$

$$I_i = a_1 \quad i = 1(1)n - 2, I = \frac{1}{2}[(a + a_1) \pm \sqrt{(a_1 - a)^2 + 4(a_n^2 \cdots a_2^2)}] - 3$$

روشهای تبدیلی برای تعیین مقادیر ویژه

روش ژاکوبی:

این روش در مورد ماتریسهای متقارن به کار می رود. فرض می کنیم $|a_{ik}|$ درایه ای است که روی قطر

اصلی نیست و از لحاظ کمی بیشترین مقدار را دارد. درایه های a_{ki} و a_{kk} و a_{ik} و a_{ii} را در نظر می

گیریم و زیر ماتریس A از A را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ki} & a_{kk} \end{bmatrix}$$

$$S^* = \begin{bmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{bmatrix}$$

مثال:

مقادیر ویژه ماتریس زیر با روش ژاکوبی تعیین کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q = \frac{p}{4} \Rightarrow S_1 = \begin{bmatrix} \cos q & 0 & -\sin q \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin q & 0 & \cos q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = S_1^{-1} A S_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = S_2^{-1} B_1 S_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

که مقادیر ویژه عبارتند از: ۵ و ۱ و -۱.

$$S = S_1 S_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

لازم به ذکر است که ستونهای S بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه I_i می باشند.

روش LR

از جمله روشهای تبدیلی برای تعیین مقادیر ویژه می توان به روش LR اشاره نمود.

این روش در مورد ماتریسهای نامتقارن هم کاربرد دارد. اساس کار این روش تبدیل ماتریس A به حاصل ضرب دو ماتریس بالا و پایین مثلثی است که سرانجام ماتریس پایین مثلثی در دنباله تکراری به ماتریس واحد همگرا است و ماتریس بالا مثلثی به یک ماتریس بالا مثلثی همگرا است به طوری که تمام مقادیر ویژه ماتریس A روی قطر اصلی ماتریس بالا مثلثی قرار دارد. لذا تعریف می کنیم:

$$A = A_1$$

$$A_1 = L_1 R_1, \quad I_{ii} = 1, \quad i = 1(1)n$$

$$A_2 = R_1 L_1 = L_2 R_2$$

$$A_3 = R_2 L_2 = L_3 R_3$$

⋮

$$A_k = R_{k-1} L_{k-1} = L_k R_k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} L_k \lim_{k \rightarrow \infty} R_k = IR = R$$

در این روش ماتریس به ماتریسی تبدیل می شود که مقادیر ویژه آن برابر با مقادیر ویژه ماتریس A است. چون که:

$$A R_1^{-1} = L_1$$

$$A_2 = R_1 L_1 = R_1 A R_1^{-1}$$

$$\det(A_2) = \det(A)$$

$$A_2 R_2^{-1} = L_2$$

$$A_3 = R_2 L_2 = R_2 R_1 A R_1^{-1} R_2^{-1}$$

$$\det(A_3) = \det(A)$$

⋮

$$\det(A_k) = \det(A)$$

وقتی k افزایش می یابد A_k به سمت یک ماتریس بالا مثلثی بایک معیار دقت تبدیل می شود که همه مقادیر ویژه A روی قطر اصلی A_k قرار دارد. یعنی:

$$A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} R$$

وقتی سیستم بزرگ باشد تعداد عملیات محاسباتی زیاد شده و خطای *Round-off* قابل کنترل نیست که این مورد از معایب این روش شمرده می شود.

مثال:

مقادیر ویژه ماتریس زیر را توسط روش *LR* تا ۶ مرحله تکرار تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

L_1 R_1

$$r_{11} = 4 \quad l_{21}r_{11} = 1 \Rightarrow l_{21} = \frac{1}{4}$$

$$r_{12} = 3 \quad l_{21}r_{12} + r_{22} = 2 \Rightarrow r_{22} = \frac{5}{4}$$

$$A_2 = R_1 L_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{4} & 3 \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{76} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{19}{4} & 3 \\ 0 & \frac{20}{19} \end{bmatrix}$$

L_2 R_2

$$r_{11} = \frac{19}{4}$$

$$r_{12} = 3$$

$$l_{21}r_{11} = \frac{5}{16} \Rightarrow l_{21} = \frac{5}{76}$$

$$l_{21}r_{12} + r_{22} = \frac{5}{4} \Rightarrow r_{22} = \frac{20}{19}$$

$$A_3 = R_2 L_2 = \begin{bmatrix} \frac{19}{4} & 3 \\ 0 & \frac{20}{19} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{76} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{376}{76} & 3 \\ \frac{25}{361} & \frac{20}{19} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{25}{1786} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{25}{1786} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{94}{19} & 3 \\ 0 & \frac{1805}{1786} \end{bmatrix}$$

L_3 R_3

$$A_4 = R_3 L_3 = \begin{bmatrix} \frac{469}{44} & 3 \\ \frac{125}{8836} & \frac{95}{94} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{125}{44086} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{496}{94} & 3 \\ 0 & \frac{470}{496} \end{bmatrix}$$

L_4 R_4

$$A_5 = R_4 L_4 = \begin{bmatrix} 4.99786 & 3 \\ 0.00284 & \frac{470}{469} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.000568 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.99786 & 3 \\ 0 & 1.000426 \end{bmatrix}$$

L_5 R_5

$$A_6 = R_5 L_5 = \begin{bmatrix} 4.99786 & 3 \\ 0 & 1.000426 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.000568 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.999564 & 3 \\ 0.000568 & 1.000426 \end{bmatrix}$$

$$\text{if } e = 10^{-3} \Rightarrow 0.000568 \rightarrow 0 \equiv I_1 = 4.999564, I_2 = 1.000426$$

در صورتی که می دانیم مقادیر ویژه واقعی ۵ و ۱ هستند.

روش هاوس هلدنر (تبدیل به ماتریس سه قطری):

فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ باشد. با استفاده از تبدیلات ماتریسی متقارن و متعامد می توان A را به ماتریس سه قطری تبدیل کرد بدون این که مقادیر ویژه A تغییر کند.

$$P = I - 2W_{n \times 1} W_{1 \times n}^T, \quad W_{1 \times n}^T W_{n \times 1} = 1, \quad W \in \Re^n$$

$$P^T = (I - 2W_{n \times 1} W_{1 \times n}^T)^T = I - 2(WW^T)^T = I - WW^T = P$$

یعنی P متقارن است.

$$\begin{aligned}
P^T P &= (I - 2WW^T)(I - 2WW^T) = I - 2WW^T - 2WW^T + 4W(W^T W)W^T \\
&= I - 4WW^T + 4WW^T = I
\end{aligned}$$

یعنی P متعامد است.

فرض کنیم که

$$\begin{aligned}
P_r &= I - 2W_r W_r^T & W_r &\in \mathfrak{R}^n & W_r^T W_r &= 1 & 2 \leq r \leq n-1 \\
W_r &= [\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{r-1}, x_r, \dots, x_n]
\end{aligned}$$

$$r = 2 \Rightarrow P_2 = I - 2W_2 W_2^T$$

$$A = A_1, A_2 = P_2 A_1 P_2 \Rightarrow A_2(1, i) = A_2(i, 1) \quad 3 \leq i \leq n$$

$$A_3 = P_3 A_2 P_3 \Rightarrow A_3(2, i) = A_3(i, 2) \quad 4 \leq i \leq n$$

⋮

$$A_k = P_k P_{k-1} \cdots P_2 A_1 P_2 P_3 \cdots P_k$$

با افزایش k ، یک ماتریس سه قطری خواهد شد.

فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$r = 2 \Rightarrow W_2^T = [0, x_2, x_3, x_4] \quad W_2^T W_2 = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = I - 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & x_2 x_3 & x_2 x_4 \\ 0 & x_3 x_2 & x_3^2 & x_3 x_4 \\ 0 & x_4 x_2 & x_4 x_3 & x_4^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2x_2^2 & -2x_2 x_3 & -2x_2 x_4 \\ 0 & -2x_2 x_3 & 1 - 2x_3^2 & -2x_3 x_4 \\ 0 & -2x_4 x_2 & -2x_4 x_3 & 1 - 2x_4^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$A_2 = P_2 A_1 P_2$$

سطر اول $P_2(A_1 P_2)$ برابر است با سطر اول $A_1 P_2$.

سطر اول حاصل ضرب برابر است با

$$[a_{11}, a_{12}(1-2x_2^2) - 2a_1^3 x_2 x_3 - 2a_{14} x_2 x_4, -2a_{12} x_2 x_3 + a_{13}(1-2x_3^2) - 2a_{14} x_3 x_4, \\ -2a_{12} x_2 x_4 - 2a_{13} x_3 x_4 + a_{14}(1-2x_4^2)]$$

$$[a_{11}, a_{12} - 2x_2(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4), a_{13} - 2x_3(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4), \\ a_{14} - 2x_4(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)]$$

اگر فرض کنیم که $q_1 = a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$ لذا سطر اول حاصل ضرب به صورت زیر در می آید:

$$[a_{11}, a_{12} - 2x_2 q_1, a_{13} - 2x_3 q_1, a_{14} - 2x_4 q_1]$$

$$a_{13} - 2x_3 q_1 = 0 \quad (1)$$

$$a_{14} - 2x_4 q_1 = 0 \quad (2)$$

بایستی حاصل جمع مجذورات سطرها قبل و بعد از تبدیل برابر باشد. یعنی:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 = a_{11}^2 + (a_{12} - 2x_2 q_1)^2$$

$$\Rightarrow a_{12} - 2x_2 q_1 = \pm \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2}$$

$$a_{12} - 2x_2 q_1 = \pm S_1 \quad (S_1 = \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2}) \quad (3)$$

$$\begin{cases} a_{12} - 2x_2 q_1 = \pm S_1 & (3) \\ a_{13} - 2x_3 q_1 = 0 & (1) \rightarrow a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 - 2q_1 = \pm S_1 x_2 \\ a_{14} - 2x_4 q_1 = 0 & (2) \rightarrow q_1 = \pm S_1 x_2 & (4) \end{cases}$$

حال کافی است رابطه (4) در رابطه (3) قرار داده شود:

$$a_{12} \pm 2x_2^2 S_1 = \pm S_1 \rightarrow x_2^2 = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{a_{12}}{2S_1}\right) \quad (5)$$

حال رابطه (4) را در رابطه (1) قرار می دهیم

$$a_{13} - 2x_3(\pm S_1 x_2) = 0 \rightarrow x_3 = \pm \frac{a_{13}}{2S_1 x_2} \quad (6)$$

$$x_4 = \frac{a_{14}}{2S_1 x_2} \quad (7)$$

نهایتاً خواهیم داشت:

$$x_2^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\text{sgn}(a_{12})a_{12}}{2S_1} \right)$$

$$x_3 = \frac{a_{13} \text{sgn}(a_{12})}{2S_1 x_2}$$

$$x_4 = \frac{a_{14} \text{sgn}(a_{12})}{2S_1 x_2}$$

مثال:

با استفاده از الگوریتم هاوس هلدر ماتریس زیر را سه قطری کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = 3$$

$$W_2^T = [0 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]$$

$$x_2^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{a_{12} \text{sgn}(a_{12})}{2S_1} \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)(-1)}{2 \times 3} \right) = \frac{2}{3}$$

$$x_3 = \frac{a_{13} \text{sgn}(a_{12})}{2S_1 x_2} = \frac{(-2)(-1)}{2 \times 3 \times \sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$x_4 = \frac{a_{14} \text{sgn}(a_{12})}{2S_1 x_2} = \frac{2 \times (-1)}{2 \times 3 \times \sqrt{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

لذا

$$W_2^T = [0, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}]$$

بنابراین

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = P_2 A P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{16}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$W_3^T = [0 \quad 0 \quad x_3 \quad x_4]$$

$$S_2 = \sqrt{a_{23}^2 + a_{24}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$x_3^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{a_{23} * \text{sgn}(a_{23})}{2S_2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \rightarrow x_3 = 0.9732$$

$$x_4 = \sqrt{1 - x_3^2} = 0.2293$$

$$w_3^T = [0 \quad 0 \quad 0.9732 \quad 0.2293]$$

Vo

تمرینهای فصل ۲

۱- نشان دهید:

$$\|A\|_2 = \|A\|_\infty = n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n}\right)^k A^k = \frac{1}{n} A$$

۲- نشان دهید ماتریس زیر دارای مقادیر ویژه حقیقی است.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & & & & \\ 1 & 2 & 4 & & & 0 \\ & 1 & 2 & 4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 4 \\ 0 & & & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

۳- A^{-1} شعاع طیفی را محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۴- ماتریسهای $A_{2 \times 2}$ و $B_{2 \times 2}$ مفروضند، $r(A) = 0$ و $r(B) = 1$ آیا $r(AB)$ کراندار است؟

۵- فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$. برای چه مقادیری از b_1 و b_2 وقتی $k \rightarrow \infty$ داریم $(AB)^k \rightarrow 0$.

۶- ماتریس A به وسیله ماتریس T به یک ماتریس قطری تبدیل می شود.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & -13 & 18 \\ 4 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس را بیابید.

۷- نشان دهید که ماتریسهای زیر معین مثبت هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 15 & 4 & -2 & 9 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 18 & 6 & 6 \\ 9 & 1 & 6 & 19 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

۸- با استفاده از قضیه گرشگورین کرانی برای مقادیر ویژه I ماتریس حقیقی $A_{n \times n}$ ($n \geq 3$) بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & & & \\ -1 & a & -1 & & 0 \\ & -1 & a & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & & -1 \\ & & & -1 & a \end{bmatrix}$$

۹- نشان دهید که مولفه های x_i بردار ویژه X در یک معادله تفاضلی صدق می نمایند، آنگاه همه بردارهای ویژه و مقادیر ویژه را بیابید.

۱۰- سیستم $AX = Y$ مفروض است به طوری که:

$$A = \begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

جواب این سیستم را با رابطه تکراری زیر به دست می آوریم.

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + a(AX^{(k)} - Y)$$

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

چگونه پارامتر a را بیابیم تا روند تکراری فوق دارای همگرایی بهینه باشد؟

$$W_3^T = [0 \quad 0 \quad 0.9732 \quad 0.2293]$$

حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول با شرایط اولیه
(مسائل مقادیر اولیه)

I.V.P (initial value problem)

مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر می گیریم:

$$y' = f(x, y) \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = a \quad (1)$$

مسئله فوق دارای جواب منحصر به فرد است اگر تابع f در شرایط زیر صدق نماید:

۱- $f(x, y)$ حقیقی باشد

۲- تابع f در ناحیه مستطیلی $D = \{(x, y) \mid a < x < b, -\infty < y < \infty\}$ پیوسته باشد و

۳- تابع $f(x, y)$ به ازای جمیع مقادیر x متعلق به بازه $[a, b]$ و برای هر y_1 و y_2 که متعلق به ناحیه

D باشد در شرط لیب شیتز صدق کند یعنی:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_1 - y_2|$$

که در آن L ثابت لیب شیتز نامیده می شود، آن گاه مسئله مقدار اولیه (۱) دارای جواب منحصر به فرد

$y(x)$ است که در شرط اولیه صدق می کند.

در این فصل فرض ما بر این است که مسئله مقدار اولیه (۱) دارای جواب منحصر به فرد است. برای

توضیح و بیان روشهای تفاضلی برای حل عددی این مسئله ابتدا بازه $[a, b]$ را به n زیربازه با گام

مساوی h افراز می کنیم:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$$

$$x_j = x_0 + jh \quad j = 0(1)n$$

$$y'(x_j) = f(x_j, y(x_j)) \quad j = 0(1)n \quad (2)$$

روشهای تفاضلی برای حل مسئله مقدار اولیه فوق را به دو دسته کلی زیر می توان تقسیم نمود:

۱- روشهای تک گامی

۲- روشهای چندگامی

این روشها خود به دو بخش صریح و ضمنی تفکیک می شوند.

روشهایی که در آن طرف راست یعنی y_{j+1} صراحتاً و بدون واسطه در هر مرحله توسط y_j تعریف شده در مرحله قبل محاسبه شوند را روشهای صریح و در غیر این صورت روشهای ضمنی خوانده می شوند.

فرم کلی روشهای تک گامی صریح به فرم زیر می باشد:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j, h)$$

که در آن f تابع تصحیح نامیده می شود و تابعی از گام h و f می باشد.

فرم کلی روشهای تک گامی ضمنی به فرم زیر می باشد:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_{j+1}, h)$$

خطای برشی (قطع کردن) یک روش تک گامی:

خطای برشی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$T_j = y(x_{j+1}) - y(x_j) - hf(x_j, y(x_j), h)$$

دقت یک روش تک گامی:

یک روش تک گامی دارای مرتبه p است هرگاه به ازای عدد حقیقی و مثبت p ، رابطه زیر برقرار باشد.

$$|h^{-1} T_j| \leq O(h^p)$$

روش تفاضلی اویلر:

برای حل عددی مسئله مقدار اولیه رابطه (۱) که در آن بازه $[a, b]$ را به n زیر بازه با گام مساوی h

نظیر فوق افراز نموده ایم و معادله دیفرانسیل را در نقاط گره ای در نظر می گیریم:

$$y'(x_j) = f(x_j, y(x_j))$$

حال در صدد تقریب مشتق مرتبه اول با یک فرمول مشتق گیری دارای دقت مرتبه اول می باشیم.

$$y'(x_j) = \frac{\Delta y(x_j)}{h} + T_j = \frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h} + T_j = f(x_j, y(x_j)) \quad j = 0(1)n-1$$

چنان چه در رابطه فوق از خطای T_j صرف نظر کنیم داریم:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) \quad j = 0(1)n-1 \quad (3)$$

رابطه فوق فرمول روش اویلر است که یک روش تک گامی صریح می باشد. خطای برشی این روش

عبارت است از:

$$T_j = y(x_{j+1}) - y(x_j) - hf(x_j, y(x_j))$$

چنان چه در رابطه فوق از رابطه (۲) استفاده کنیم و با استفاده از بسط سری تیلور حول x_j داریم:

$$T_j = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) + \dots - hy'(x_j) - y(x_j)$$

$$T_j = \frac{h^2}{2!} y''(\xi) = O(h^2)$$

با توجه به تعریف مرتبه دقت داریم:

$$|h^{-1} T_j| = \frac{h}{2} y''(\xi) = O(h)$$

بنابراین روش اویلر دارای دقت مرتبه اول می باشد.

آنالیز خط و همگرایی روش :

قبل از پرداختن به آنالیز خط لازم است اشاره ای به معادله آزمون یا *Test Equation* بنماییم. رفتار جواب مسئله مقدار اولیه (۱) در همسایگی نقطه ای نظیر (\bar{x}, \bar{y}) را می توان با در نظر گرفتن فرم خطی مسئله (۱) پیش بینی نمود. لذا تابع غیر خطی $f(x, y)$ را می توان با استفاده از بسط سری تیلور حول (\bar{x}, \bar{y}) و قطع آن بعد از جملات اول خطی نمود. نهایتاً فرم خطی معادله دیفرانسیل فوق عبارت است از:

$$y' = Iy + c$$

در صورتی که

$$I = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(\bar{x}, \bar{y})}$$

$$c = f(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(\bar{x}, \bar{y})} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(\bar{x}, \bar{y})} (x - \bar{x})$$

حال با انتخاب $w = y + \frac{c}{I}$ معادله به صورت زیر ساده می شود:

$$w' = I w$$

جواب $w(x)$ معادله فوق در صورتی که I مطلقاً موهومی باشد متناوب خواهد بود.

شکل زیر رفتار جواب را نشان می دهد.

حال به آنالیز خطای اویلر می پردازیم. با استفاده از تعریف خطای برشی داریم:

$$y(x_{j+1}) = T_j + y(x_j) + hf(x_j, y(x_j)) \quad (1)$$

در روند محاسبات دقیق و حساب دقیق با استفاده از روش اویلر y_j را می یابیم اما در عمل در محاسبات به علت تاثیر خطای روند کردن عملاً y_j به دست نمی آید لذا ما تقریب \bar{y}_j را می یابیم. بنابراین می توانیم تعریف کنیم که:

$$\bar{y}_{j+1} = \bar{y}_j + hf(x_j, \bar{y}_j) - R_j, \quad j = 0(1)n-1 \quad (2)$$

حال اگر رابطه (۲) را از (۱) کم کنیم

$$y(x_{j+1}) - \bar{y}_{j+1} = y(x_j) - \bar{y}_j + h[f(x_j, y(x_j)) - f(x_j, \bar{y}_j)] + (T_j + R_j)$$

و از معادله آزمون استفاده نماییم داریم:

$$y(x_{j+1}) - \bar{y}_{j+1} = y(x_j) - \bar{y}_j + hl[y(x_j) - \bar{y}_j] + (T_j + R_j)$$

با فرض $e_j = y(x_j) - \bar{y}_j$ و قرار دادن آن در رابطه فوق معادله خطا را به صورت زیر می یابیم:

$$e_{j+1} = e_j + hle_j + (T_j + R_j) \quad j = 0(1)n-1$$

$$e_{j+1} = (1 + lh)e_j + (T_j + R_j)$$

حال اگر $1 + lh = A$ و $T_j + R_j = B$ فرض کنیم داریم:

$$e_{j+1} = Ae_j + B \quad j = 0(1)n-1$$

$$j=0 \Rightarrow e_1 = Ae_0 + B$$

$$j=1 \Rightarrow e_2 = Ae_1 + B = A(Ae_0 + B) + B = A^2e_0 + (A+1)B$$

$$e_3 = A^3e_0 + A^2B + AB + B$$

⋮

$$e_j = A^j e_0 + (1 + A + A^2 + \dots + A^{j-1})B$$

$$|e_j| = \left| A^j e_0 + \frac{A^j - 1}{A - 1} B \right| \leq A^j |e_0| + \frac{A^j - 1}{A - 1} |B| = A^j |e_0| + \frac{1}{hl} |B| (A^j - 1)$$

$$e^{lh} \geq 1 + lh = A$$

$$e_{j+1} = e_j + hl e_j + (T_j + R_j) \quad j = 0(1)n-1$$

$$e_{j+1} = (1 + lh)e_j + (T_j + R_j)$$

$$e^{hl} \geq 1 + hl = A \Rightarrow e^{hjl} \geq A^j \quad ; jh = x_j - x_0 \leq x_n - x_0$$

$$A^j \leq e^{l(x_j - x_0)} \leq e^{l(x_n - x_0)}$$

$$\therefore |e_j| \leq e^{l(x_n - x_0)} |e_0| + \frac{e^{l(x_n - x_0)} - 1}{hl} |B|$$

$$\text{if } |e_0| = 0 \quad |e_j| \leq \frac{e^{l(x_n - x_0)} - 1}{l} \left(\frac{T_j + R_j}{h} \right) \quad ; T = \max |T_j| \quad , R = \max |R_j|$$

$$|e_j| \leq \frac{e^{l(x_n - x_0)} - 1}{l} \left(\frac{T}{h} + \frac{R}{h} \right) \quad j = 0(1)n-1$$

T/h درجه اول (خطی) است. پس وقتی $h \rightarrow 0$ این عبارت به سمت صفر می رود. ولی در مورد

R/h وقتی $h \rightarrow 0$ خطا به بی نهایت میل می کند. به این خاطر باید بین این دو خطا تعادل برقرار شود

که خطای *Round* مهار گردد. بهترین راه انتخاب گام مناسب است.

پایداری روش:

روشی پایدار است که در غیاب خطای *Round* وقتی $h \rightarrow 0$ خطای مرحله پایانی به سمت صفر میل

کند.

روش های رانگ - کوتا:

روشهای تیلور که قبلاً بحث شد دارای ویژگی مناسبی هستند که همانا خطای برشی یا موضعی مرتبه بالای آنهاست. ولی نیاز به محاسبه مشتقات $f(x, y)$ در بسیاری از مسائل می تواند پیچیده و ملال آور باشد بنابراین از روش تیلور به ندرت استفاده می شود. ما ابتدا اصول اساسی روشهای رانگ - کوتا را بیان می کنیم. با استفاده از قضیه مقدار میانگین داریم:

$$\begin{aligned}y(x_{j+1}) &= y(x_j) + hy'(x_j + qh) \\ &= y(x_j) + hf(x_j + qh, y(x_j + qh)), \quad 0 < q < 1\end{aligned}$$

به ازای $q = \frac{1}{2}$ داریم:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + hf\left(x_j + \frac{h}{2}, y\left(x_j + \frac{h}{2}\right)\right)$$

روش اوایلر با نصف گام $\frac{h}{2}$ داریم:

$$y\left(x_j + \frac{h}{2}\right) \approx y_j + \frac{h}{2} f_j$$

بنابراین تقریب زیر را داریم:

$$y_{j+1} = y_j + hf\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f_j\right)$$

رابطه فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$k_1 = hf_j$$

$$k_2 = hf\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{1}{2} k_1\right)$$

$$y_{j+1} = y_j + k_2$$

این روش را روش اوایلر با نصف گام می نامند.

حال با استفاده از روش اوایلر می توان روند زیر را بررسی کرد

$$y'(x_j + \frac{h}{2}) \approx \frac{1}{2}[y'(x_j) + y'(x_{j+1})]$$

$$\approx \frac{1}{2}[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})]$$

بنابراین تقریب ذیل را خواهیم داشت:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_j + hf(x_j, y_j))]$$

این روش را می توان به فرم زیر نیز نوشت:

$$k_1 = hf(x_j, y_j)$$

$$k_2 = hf(x_j + h, y_j + k_1)$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad , j = 0(1)n-1$$

این روش را روش کوشی-اویلر می نامند.

دو روش قبل را می توان به صورت زیر تعبیر نمود:

$$y_{j+1} = y_j + h(\text{متوسط ضریب زاویه})$$

این اساس روشهای رانگ - کوتا می باشد. عموماً در روشهای رانگ - کوتا ما ضریب زاویه را در نقطه

x_j و سایر نقاط دیگر می یابیم و متوسط این ضریب زاویه هارا در گام h ضرب می نماییم و به جواب

y_{j+1} اضافه می کنیم. بنابراین روشهای رانگ - کوتا را می توان به صورت کلی زیر تعریف کرد:

روش رانگ - کوتای ۲ ضریب زاویه ای:

روش رانگ - کوتای با ۲ ضریب زاویه را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(x_j, y_j) \\ k_2 &= hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} k_1) \\ k_3 &= hf(x_j + c_3 h, y_j + a_{31} k_1 + a_{32} k_2) \\ &\vdots \\ k_v &= hf(x_j + c_v h, y_j + a_{v1} k_1 + a_{v2} k_2 + \dots + a_{v, v-1} k_{v-1}) \\ y_{j+1} &= y_j + \sum_{i=1}^v w_i k_i, \quad \sum_{i=1}^v w_i = 1 \end{aligned} \right\}$$

در فرمول فوق تابع تصحیح عبارت است از ترکیب خطی ضریب زاویه ها در نقطه x_j و تعداد دیگر نقاط که در بین x_j و x_{j+1} قرار دارند. با دانستن طرف راست می توان y_{j+1} را به آسانی محاسبه نمود. بنابراین روش رانگ - کوتا یک روش صریح v ضریب زاویه ای است. برای تعیین c ها، a ها و w ها در رابطه فوق ما y_{j+1} را به صورت سری توانی h بسط می دهیم به طوری که با بسط سری تیلور جواب معادله دیفرانسیل تا تعداد معینی از جملات منطبق باشد. برای آسانی کار در ذیل نحوه به دست آوردن c ها، a ها و w ها را برای روش مرتبه دوم با جزئیات بحث و بررسی می کنیم.

روش رانگ کوتای مرتبه دوم

روش رانگ - کوتای دو ضریب زاویه ای را مدنظر قرار می دهیم:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(x_j, y_j) \\ k_2 &= hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} k_1) \\ y_{j+1} &= y_j + w_1 k_1 + w_2 k_2 \end{aligned} \right\}$$

پارامترهای c_2 ، a_{21} ، w_1 و w_2 را به طریقی می یابیم تا y_{j+1} به $\mathcal{Y}(x_{j+1})$ نزدیکتر گردد. بنابراین بسط سری تیلور جواب معادله دیفرانسیل $\mathcal{Y}(x_{j+1})$ را به صورت زیر داریم:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j + h) = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_j) + \dots (*)$$

$$y'(x_j) = f(x, y) \Rightarrow y'(x_j) = f(x_j, y_j)$$

$$y''(x_j) = f_x + f_y \frac{dy}{dx} = f_x + f_y y' = f_x + f_y f \Rightarrow y''(x_j) = (f_x + ff_y)_{x_j}$$

$$y'''(x_j) = (f_{xx} + ff_{xy} + (f_x + ff_y) f_y + f(f_{yx} + ff_{yy}))_{x_j}$$

$$= (f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + (f_x + ff_y) f_y)_{x_j}$$

$$\xrightarrow{\text{in } (*)} y(x_{j+1}) = y(x_j) + hf + \frac{h^2}{2!} (f_x + ff_y)_{x_j} + \frac{h^3}{3!} (f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + (f_x + ff_y) f_y)_{x_j} + \dots (**)$$

حال با بسط f حول (x_j, y_j) مقدار k_2 را حساب می کنیم:

$$k_2 = hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} hf)$$

$$= h [f(x_j, y_j) + (c_2 hf_x + a_{21} hff_y) + \frac{1}{2!} (c_2^2 h^2 f_{xx} + 2c_2 h^2 a_{21} ff_{xy} + (a_{21} hf)^2 f_{yy}) + \dots]$$

با جایگزینی

$$y_{j+1} = y_j + w_1 hf + w_2 hf + h^2 (w_2 c_2 f_x + w_2 a_{21} ff_y) + \frac{h^3}{2!} (w_2 c_2^2 f_{xx} + 2w_2 c_2 a_{21} ff_{xy} + a_{21}^2 f^2 f_{yy} w_2) + \dots (***)$$

در k_2 و k_1 رابطه فوق

داریم:

حال با متحد قرار دادن $(**)$ و $(***)$ داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2 c_2 = \frac{1}{2} \\ w_2 a_{21} = \frac{1}{2} \\ c_2 = a_{21} \end{array} \right.$$

جواب دستگاه فوق عبارت است از $a_{21} = c_2$ ، $w_2 = \frac{1}{2c_2}$ و $w_1 = 1 - \frac{1}{2c_2}$ به طوری که $c_2 \neq 0$

پارامتر آزاد می باشد. چنان چه جواب را در رابطه بالا قرار دهیم داریم:

$$y_{j+1} = y_j + hf_j + \frac{h^2}{2} (f_x + ff_y)_{x_j} + \frac{h^3 c_2}{4} (f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy})_{x_j} + \dots$$

خطای برشی عبارت است از:

$$\begin{aligned} T_j &= \mathcal{Y}(x_{j+1}) - y_{j+1} \\ &= h^3 \left[\frac{1}{3!} (f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}) + (f_x + ff_y) f_y - \frac{1}{2!} (w_2 c_2^2 f_{xx} + 2c_2 a_{21} w_2 ff_{xy} + \right. \\ &\quad \left. a_{21}^2 w_2 f^2 f_{yy}) \right] + \dots \\ &= h^3 \left[\left(\frac{c_2}{4} - \frac{1}{6} \right) (f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}) - \frac{1}{6} (f_x + ff_y) f_y \right] + \dots \end{aligned}$$

این رابطه نشان می دهد که روش فوق دارای دقت مرتبه دوم است. پارامتر آزاد c_2 معمولاً بین صفر و یک انتخاب می گردد. برخی اوقات c_2 را به طریقی انتخاب می کنیم که یکی از w ها صفر شوند. به عنوان مثال اگر $c_2 = \frac{1}{2}$ انتخاب شود $w_1 = 0$ می گردد.

(a) اگر $c_2 = \frac{1}{2}$ انتخاب شود داریم:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f_j) \quad , j = 0(1)n-1$$

این رابطه همان روش نصف گام اویلر است.

(b) اگر $c_2 = 1$ را به عنوان پارامتر آزاد انتخاب کنیم داریم:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f(x_j, y_j) + f(x_j + h, y_j + hf_j)] \quad , j = 0(1)n-1$$

این روش همان روش کوشی - اویلر است که قبلاً بحث شد.

(c) اگر $c_2 = \frac{2}{3}$ انتخاب شود یعنی ضریب جملاتی از خطای قطع کردن را صفر بسازیم روشی را که

به دست خواهیم آورد، روش رانگ - کوتای مرتبه دوم بهینه می باشد.

$$w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{3}{4}$$

$$k_1 = hf(x_j, y_j)$$

$$k_2 = hf(x_j + \frac{2}{3}h, y_j + \frac{2}{3}k_1)$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2), j = 0(1)n-1$$

روشهای رانگ - کوتای مرتبه سوم:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(x_j, y_j) \\ k_2 &= hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} k_1) \\ k_3 &= hf(x_j + c_3 h, y_j + a_{31} k_1 + a_{32} k_2) \\ y_{j+1} &= y_j + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 \end{aligned} \right\} j = 0(1)n-1$$

نظیر روش مرتبه دوم می توان a ها، c ها و w ها را محاسبه کرد. چنان چه $c_2 = \frac{1}{2}$ به عنوان پارامتر آزاد انتخاب کنیم روشی که می یابیم رانگ - کوتای کلاسیک مرتبه سوم می باشد.

$$\left. \begin{aligned} c_2 = a_{21} = \frac{1}{2}, c_3 = 1, a_{31} = -1, a_{32} = 2, w_1 = w_3 = \frac{1}{6}, w_2 = \frac{4}{6} \\ k_1 &= hf(x_j, y_j) \\ k_2 &= hf(x_j + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_j + h, y_j - k_1 + 2k_2) \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{aligned} \right\} j = 0(1)n-1$$

روش های رانگ - کوتای مرتبه چهارم:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(x_j, y_j) \\ k_2 &= hf(x_j, c_2 h, y_j + a_{21} k_1) \\ k_3 &= hf(x_j + c_3 h, y_j + a_{31} k_1 + a_{32} k_2) \\ k_4 &= hf(x_j + c_4 h, y_j + a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3) \\ y_{j+1} &= y_j + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4 \end{aligned} \right\} j = 0(1)n-1$$

باز هم نظیر روند فوق عمل می کنیم و c ها، a ها و w ها را می یابیم. ما در اینجا فقط ۱۲ رابطه را به دست آوردیم اما تعداد مجهولات ۱۳ می باشد، با انتخاب پارامتر آزاد برابر $\frac{1}{2}$ مجهولات را به صورت زیر می توان محاسبه کرد. لذا روش کلاسیک مرتبه چهارم رانگ - کوتا را خواهیم داشت:

$$c_2 = a_{21} = c_3 = a_{32} = \frac{1}{2}, a_{31} = 0$$

$$c_4 = 1 \quad a_{41} = a_{42} = 0 \quad a_{43} = 1$$

$$w_1 = w_4 = \frac{1}{6} \quad w_2 = w_3 = \frac{2}{6}$$

روش رانگ - کوتای کلاسیک مرتبه چهارم:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(x_j, y_j) \\ k_2 &= hf\left(x_j + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_j + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_4 &= hf(x_j + h, y_j + k_3) \quad j = 0(1)n-1 \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \right\}$$

روشهای فوق صریح، تک گامی و خودشروع کننده هستند. چون از $y(a) = a$ که در شرایط اولیه مسئله داده شده، می توان استفاده کرد و روشها را راه اندازی نمود.

همگرایی و آنالیز خطای روشهای رانگ کوتا:

در این جا ما همگرایی روش مرتبه سوم یا سه ضریب زاویه ای رانگ - کوتا را اثبات می کنیم

بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(x_j, y_j) \\ k_2 &= hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} k_1) \\ k_3 &= hf(x_j + c_3 h, y_j + a_{31} k_1 + a_{32} k_2) \quad j = 0(1)n-1 \\ y_{j+1} &= y_j + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

همچنین می دانیم که فرم کلی روش تک گامی به فرم زیر است:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j, h) \quad (2)$$

از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که تابع تصحیح روش مرتبه سوم رانگ - کوتا عبارت است از:

$$f(x_j, y_j, h) = \frac{1}{h}[w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3] \quad (3)$$

حال مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر می گیریم. این مسئله دارای جواب منحصر به فرد است اگر f در

شرط لیب شیتز صدق کند:

$$y' = f(x, y)$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

از آنجا که k_i توابعی از f هستند بایستی در شرط لیبشیتز صدق کنند. لذا به ازای y_j و

y_j^* داریم:

$$k_1 = hf(x_j, y_j)$$

$$|k_1 - k_1^*| = h|f(x_j, y_j) - f(x_j, y_j^*)| \leq hL|y_j - y_j^*| \quad (4)$$

$$\begin{aligned} |k_2 - k_2^*| &= h|f(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} k_1) - f(x_j + c_2 h, y_j^* + a_{21} k_1^*)| \\ &\leq hL|(y_j + a_{21} k_1) - (y_j^* + a_{21} k_1^*)| = hL|(y_j - y_j^*) + a_{21}(k_1 - k_1^*)| \\ &\leq hL\{|y_j - y_j^*| + a_{21}|k_1 - k_1^*|\} \\ &\leq hL\{|y_j - y_j^*| + a_{21}hL|y_j - y_j^*|\} = hL(1 + a_{21}hL)|y_j - y_j^*| \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |k_3 - k_3^*| &= h|f(x_j + c_3 h, y_j + a_{31} k_1 + a_{32} k_2) - f(x_j + c_3 h, y_j^* + a_{31} k_1^* + a_{32} k_2^*)| \\ &\leq hL|(y_j + a_{31} k_1 + a_{32} k_2) - (y_j^* + a_{31} k_1^* + a_{32} k_2^*)| \\ &= hL|(y_j - y_j^*) + a_{31}(k_1 - k_1^*) + a_{32}(k_2 - k_2^*)| \\ &\leq hL\{|y_j - y_j^*| + a_{31}|k_1 - k_1^*| + a_{32}|k_2 - k_2^*|\} \\ &\leq hL\{|y_j - y_j^*| + a_{31}hL|y_j - y_j^*| + a_{32}hL(1 + a_{21}hL)|y_j - y_j^*|\} \\ &= hL\{1 + a_{31}hL + a_{32}hL(1 + a_{21}hL)\}|y_j - y_j^*| \quad (6) \end{aligned}$$

حال بایستی ثابت کنیم وقتی که $h \rightarrow 0$ تابع تصحیح رابطه (3) هم در شرط لیبشیتز صدق می کند.

$$\begin{aligned}
|f(x_j, y_j, h) - f^*(x_j, y_j^*, h)| &= \frac{1}{h} |(w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3) - (w_1 k_1^* + w_2 k_2^* + w_3 k_3^*)| \\
&= \frac{1}{h} |w_1(k_1 - k_1^*) + w_2(k_2 - k_2^*) + w_3(k_3 - k_3^*)| \\
&\leq \frac{1}{h} \{w_1 |k_1 - k_1^*| + w_2 |k_2 - k_2^*| + w_3 |k_3 - k_3^*|\} \\
&= \frac{1}{h} \{w_1 hL |y_j - y_j^*| + w_2 hL(1 + a_{21} hL) |y_j - y_j^*| + w_3 hL(1 + a_{31} hL + \\
&\quad a_{32} hL(1 + a_{21} hL)) |y_j - y_j^*|\} \xrightarrow{(4),(5),(6)} \\
\therefore |f - f^*| &\leq L \{w_1 + w_2(1 + a_{21} hL) + w_3(1 + a_{31} hL + a_{32} hL(1 + a_{21} hL))\} |y_j - y_j^*| \\
&= L \{(w_1 + w_2 + w_3) + hL(w_2 a_{21} + w_3 a_{31}) + hL a_{32} w_3 + w_3 a_{32} a_{21} h^2 L^2\} |y_j - y_j^*| \\
\text{if } h \rightarrow 0 &\Rightarrow |f - f^*| \leq L |y_j - y_j^*|
\end{aligned}$$

لذا نتیجه می گیریم که جواب محاسبه شده به جواب واقعی همگراست. بر همین اساس می توان همگرایی روشهای رانگ کوتای مراتب بالاتر را هم بررسی کرد.

روشهای چندگامی:

یک روش چندگامی را دارای دقت مرتبه P نامیم هرگاه خطای موضعی (*truncate*) آن را با استفاده از سری تیلور حول x_j بسط دهیم:

$$\begin{aligned}
T_j &= C_0 y(x_j) + C_1 h y'(x_j) + C_2 h^2 y''(x_j) + \dots + C_p h^p y^{(P)}(x_j) + C_{p+1} h^{p+1} y^{(P+1)}(x_j) \\
&\quad + O(h^{p+2})
\end{aligned}$$

ضرایب $C_i = 0 \quad i = 0(1)P$, $C_{p+1} \neq 0$ باشد.

سازگاری روشهای چندگامی:

یک روش چندگامی خطی را سازگار (*consistant*) می گوئیم اگر دارای دقت مرتبه $P(> 1)$ باشد یعنی حداقل $C_0 = C_1 = 0$ باشد.

روش k گامی:

فرم کلی روشهای k گامی به صورت زیر است:

$$y_{j+1} = \sum_{i=1}^k a_i y_{j-i+1} + hf(x_{j+1}, x_j, \dots, x_{j-k+1}, y'_{j+1}, \dots, y'_{j-k+1}, h)$$

روش k گامی خطی:

فرم کلی روشهای k گامی خطی به فرم زیر است:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= \sum_{i=1}^k a_i y_{j-i+1} + h \sum_{i=0}^k b_i y'_{j-i+1} \\ &= \sum_{i=1}^k a_i y_{j-i+1} + h [b_0 y'_{j+1} + \sum_{i=1}^k b_i y'_{j-i+1}] \end{aligned} \quad (1)$$

اگر در رابطه (1)، $b_0 = 0$ باشد روش k گامی خطی را روش صریح یا روش پیشگو و یا باز و در غیر اینصورت روش ضمنی یا اصلاحگر و وابسته خوانده می شود.

روش های k گامی صریح آدامز - بشفورت:

مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر می گیریم:

$$y' = f(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = a \quad (2)$$

ابتدا بازه $[a, b]$ را به n زیر بازه با گام مساوی h افراز می کنیم لذا داریم:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_j = a + jh, \quad j = 0(1)n$$

حال اگر از معادله داده شده در فاصله $[x_j, x_{j+1}]$ نسبت به x انتگرال بگیریم داریم:

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} y' dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y) dx \\ y(x_{j+1}) &= y(x_j) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y) dx \end{aligned} \quad (3)$$

در (۳) از تابع زیر علامت انتگرال از آن جا که y مجهول می باشد نمی توان انتگرال گرفت لذا آن را

توسط فرمول درون یاب پسر نیوتن در نقاط گره ای قبل از x_j یعنی $x_j, x_{j-1}, \dots, x_{j-k+1}$ نقطه

تقریب می زنیم. لذا داریم:

$$P_{k-1}(x) = f_j + \frac{x-x_j}{h} \nabla f_j + \frac{(x-x_j)(x-x_{j-1})}{2h^2} \nabla^2 f_j + \dots + \frac{(x-x_j) \dots (x-x_{j-k+2})}{(k-1)! h^{k-1}} \nabla^{k-1} f_j \\ + \frac{(x-x_j) \dots (x-x_{j-k+1})}{k!} f^{(k)}(c)$$

حال با تغییر متغیر زیر می توان حدود انتگرال گیری را ساده نمود. بنابراین داریم:

$$\frac{x-x_j}{h} = u \Rightarrow dx = hdu \\ x: [x_j, x_{j+1}] \Rightarrow u: [0,1]$$

$$P_{k-1}(u) = f_j + u \nabla f_j + \frac{1}{2} u(u+1) \nabla^2 f_j + \dots + \frac{u(u+1) \dots (u+k-2)}{(k-1)!} \nabla^{k-1} f_j \\ + \frac{u(u+1) \dots (u+k-1)}{k!} h^k f^{(k)}(c) \quad (4)$$

حال رابطه (۴) را در رابطه (۳) قرار می دهیم داریم:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + h \int_0^1 [f_j + u \nabla f_j + \frac{1}{2} u(u+1) \nabla^2 f_j + \dots + \frac{u(u+1) \dots (u+k-2)}{(k-1)!} \nabla^{k-1} f_j] du \\ + \int_0^1 \frac{u(u+1) \dots (u+k-1)}{k!} h^{k+1} f^{(k)}(c) du$$

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + h \{ f_j + \frac{1}{2} \nabla f_j + \frac{5}{12} \nabla^2 f_j + \frac{3}{8} \nabla^3 f_j + \frac{251}{720} \nabla^4 f_j + \dots \} + T_j$$

حال اگر از خطای قطع کردن صرف نظر کنیم رابطه زیر را داریم. از این رابطه می توان خانواده ای از روشهای آدامز- بشفورت را با انتخاب جملات متفاوت آن به دست آورد.

$$y_{j+1} = y_j + h \{ f_j + \frac{1}{2} \nabla f_j + \frac{5}{12} \nabla^2 f_j + \frac{3}{8} \nabla^3 f_j + \frac{251}{720} \nabla^4 f_j + \dots \} \quad (5)$$

که خطای آن عبارت است از:

$$T_j = \frac{h^{k+1}}{k!} \int_0^1 u(u+1) \dots (u+k-1) f^{(k)}(c) du \quad (6)$$

اگر در رابطه (۵) تا تفاضل مرتبه اول به عنوان تقریب استفاده کنیم یا به عبارت دیگر تابع f را بایک چند جمله ای درجه اول تقریب بزنیم روش آدامز- بشفورت دوگانی یا مرتبه دوم را خواهیم داشت:

روش آدامز بشفورت مرتبه دوم

$$y_{j+1} = y_j + h \left\{ f_j + \frac{1}{2} \nabla f_j \right\}$$

$$y_{j+1} = y_j + h \left[f_j + \frac{1}{2} (f_j - f_{j-1}) \right]$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [3 f_j - f_{j-1}] \quad j=1(1)n-1$$

حال با استفاده از رابطه (۶) و با انتخاب $k=2$ داریم:

$$T_j = \frac{h^3}{2!} \int_0^1 f''(c) u(u+1) du \quad ; 0 < c < 1$$

برای محاسبه این انتگرال باید به نکته زیر توجه کنیم.

نکته:

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند و بخواهیم انتگرال

$$\int_a^b g(x) f(x) dx$$

حساب کنیم که در آن $f(x)$ تابعی پیوسته باشد و $g(x)$ در فاصله انتگرالگیری تغییر علامت ندهد

آنگاه مقدار این انتگرال عبارت است از:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(x) \int_a^b g(x) dx \quad a < x < b$$

بنابراین خطای برشی روش آدامز - بشفورت مرتبه دوم عبارت است از:

$$T_j = \frac{h^3}{2!} f''(x) \int_0^1 u(u+1) du \quad ; 0 < x < 1$$

$$= \frac{5}{12} h^3 f''(x)$$

$$|h^{-1} T_j| = O(h^2)$$

یعنی روش دارای دقت مرتبه دوم است.

روش آدامز بشفورت مرتبه سوم

$$y_{j+1} = y_j + h \left\{ f_j + \frac{1}{2} \nabla f_j + \frac{5}{12} \nabla^2 f_j \right\}$$

$$y_{j+1} = y_j + h \left[f_j + \frac{1}{2} (f_j - f_{j-1}) + \frac{5}{12} (f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2}) \right]$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{12} [23f_j - 16f_{j-1} + 5f_{j-2}] \quad j = 2(1)n-1$$

$$T_j = \frac{3}{8} h^4 f'''(c) \quad 0 < c < 1$$

$$|h^{-1} T_j| = O(h^3)$$

روش آدامز بشفورت مرتبه چهارم

$$y_{j+1} = y_j + h \left\{ f_j + \frac{1}{2} \nabla f_j + \frac{5}{12} \nabla^2 f_j + \frac{3}{8} \nabla^3 f_j \right\}$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24} [55f_j - 59f_{j-1} + 37f_{j-2} - 9f_{j-3}] \quad j = 3(1)n-1$$

$$T_j = \frac{251}{720} h^5 f^{(4)}(c) \quad c \in (0,1)$$

$$|h^{-1} T_j| = O(h^4)$$

مثال:

مساله زیر را با کلیه روشهای آدامز بشفورت با گام $h = 0.2$ حل کنید. همچنین جواب محاسبه شده در $x = 1$ را با جواب واقعی مقایسه کرده و قدر مطلق خطا را بیابید.

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = x + y \\ 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$$

(حل)

ابتدا جواب واقعی را به دست می آوریم. از معادلات دیفرانسیل داریم که برای حل معادله خطی مرتبه اول باید $I.F$ یا عامل انتگرال ساز را بیابیم. یعنی اگر

$$y' + f(x)y = g(x)$$

آنگاه

$$I.F = e^{\int f(x) dx}$$

$$y = e^{-\int f(x) dx} \left[\int g(x) \cdot e^{\int f(x) dx} dx + c \right]$$

پس داریم:

$$I.F = e^{-\int dx} = e^{-x}$$

$$y = e^x \left[\int x e^{-x} dx + c \right] = e^x \left[-x e^{-x} - e^{-x} + c \right]$$

$$y = -x - 1 + c e^x$$

$$\Rightarrow y = -x - 1 + 2e^x \Rightarrow y(1) = 3.436564 \quad (*)$$

$$y(0) = -1 + c = 1 \Rightarrow c = 2$$

ابتدا روش آدامز بشفورت مرتبه دوم:

ولی قبل از آن ما توسط (*) y_1 را محاسبه کردیم، چون این روش خودشروع کننده نیستند.

$$y_1 = y(x_1 = 0.2) = 1.242806$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} (3 f_j - f_{j-1}) \quad i=1(1)4$$

$$n = \frac{1-0}{0.2} = 5 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 & x_1 = 0.2 \\ x_2 = 0.4 & x_3 = 0.6 \\ x_4 = 0.8 & x_5 = 1 \end{cases}$$

$$j=1 \quad y_2 = 1.242806 + 0.1(3(0.2 + 1.242806) - (0 + 1))$$

$$= 1.575647$$

$$j=2 \quad y_3 = 1.575647 + 0.1(3(0.4 + 1.575647) - (0.2 + 1.242806))$$

$$= 2.024061$$

$$j=3 \quad y_4 = 2.024061 + 0.1(3(0.6 + 2.024061) - (0.4 + 1.575647))$$

$$= 2.613714$$

$$j=4 \quad y_5 = 2.613714 + 0.1(3(0.8 + 2.613714) - (0.6 + 2.024061))$$

$$= 3.375422$$

$$= y(x_5 = 1) \quad (**)$$

مقدار (*) مقدار واقعی در $x=1$ و مقدار محاسبه شده در $x=1$ است. پس قدر مطلق خطا در

این نقطه عبارت است از:

$$e_5 = |y_5 - y(x_5 = 1)| = 0.061142$$

ضمناً (e_0, e_1, \dots, e_5) بردار خطاست. با نرم ماکزیمم گرفتن این بردار خطای حل مسئله حاصل می شود.

روش آدامز بشفورت مرتبه سوم:

ولی قبل از آن باید y_2 را از (*) محاسبه کنیم.

$$y_2 = y(x_2 = 0.4) = 1.583649$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{12} [23 f_j - 16 f_{j-1} + 5 f_{j-2}] \quad j = 2(1)4$$

$$j=2 \quad y_3 = 1.583649 [23(0.4 + 1.583649) - 16(0.2 + 1.242806) + 5(0 + 1)] \\ = 2.042633$$

$$j=3 \quad y_4 = 2.646903$$

$$j=4 \quad y_5 = 3.428818$$

$$e_5 = |y_5 - y(x_5 = 1)| = 0.0077462$$

تمرین:

مسئله فوق را با روش آدامز بشفورت مرتبه چهارم حل کنید.

روش چندگامی ضمنی آدامز - مولتون

از معادله دیفرانسیل رابطه (۲) در بازه $[x_j, x_{j+1}]$ انتگرال می گیریم. لذا داریم:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} y' dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y) dx$$

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y) dx \quad (1)$$

حال چنان چه تابع f را در $k+1$ نقطه قبل از x_{j+1} با استفاده از فرمول درون یاب پسرو نیوتن یعنی در نقاط $x_{j+1}, x_j, \dots, x_{j-k+1}$ تقریب بزینم چند جمله ای درون یاب درجه k ام را به صورت زیر داریم:

$$P_k(x) = f_{j+1} + \frac{x - x_{j+1}}{h} \nabla f_{j+1} + \frac{(x - x_{j+1})(x - x_j)}{2! h^2} \nabla^2 f_{j+1} + \dots + \frac{(x - x_{j+1})(x - x_j) \dots (x - x_{j-k+2})}{k! h^k} \nabla^k f_{j+1} + \frac{(x - x_{j+1})(x - x_j) \dots (x - x_{j-k+1})}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c)$$

برای آسانی کار و جهت تغییر حدود انتگرال گیری از تغییر متغیر $\frac{x - x_j}{h} = u$ استفاده می کنیم لذا داریم:

$$\begin{aligned} dx &= h du \\ u &: [0, 1] \\ \frac{x - x_{j+1}}{h} &= \frac{x - (x_j + h)}{h} = \frac{x - x_j - h}{h} = u - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P_k(u) &= \left\{ f_{j+1} + (u-1) \nabla f_{j+1} + \frac{u(u-1)}{2!} \nabla^2 f_{j+1} + \frac{(u-1)u(u+1)}{3!} \nabla^3 f_{j+1} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(u-1)u(u+1) \dots (u+k-2)}{k!} \nabla^k f_{j+1} \right\} \\ &\quad + h^{k+1} \frac{(u-1)u(u+1) \dots (u+k-1)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c) \end{aligned}$$

حال این عبارت را در رابطه (1) قرار می دهیم:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + \int_0^1 (*) dx + h^{k+2} \int_0^1 \frac{(u-1)u(u+1) \dots (u+k-1)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c) du$$

حال اگر از خطای برشی این رابطه صرف نظر کنیم و انتگرال بگیریم و محاسبه کنیم داریم:

$$y_{j+1} = y_j + H \left[f_{j+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{j+1} - \frac{1}{12} \nabla^2 f_{j+1} - \frac{1}{24} \nabla^3 f_{j+1} - \frac{19}{720} \nabla^4 f_{j+1} - \frac{27}{1440} \nabla^5 f_{j+1} - \dots \right] \quad (2)$$

که خطای برشی آن عبارت است از:

$$T_j = \frac{h^{k+2}}{(k+1)!} \int_0^1 (u-1)u(u+1)\dots(u+k-1) f^{(k+1)}(m) \quad m \in (0,1)$$

در رابطه (۲) با انتخاب جملات مراتب مختلف می توان روشهای مختلف آدامز- مولتون را به دست آورد. چنان چه تا تفاضل مرتبه اول را به عنوان تقریب در نظر بگیریم روش آدامز- مولتون مرتبه دوم و تک گامی را داریم:

۱- روش آدامز مولتون مرتبه دوم (تک گامی)

$$y_{j+1} = y_j + H \left[f_{j+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{j+1} \right]$$

$$y_{j+1} = y_j + H \left[f_{j+1} - \frac{1}{2} (f_{j+1} - f_j) \right] \quad j = 0(1)n-1$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f_{j+1} + f_j]$$

$$T_{j+1} = \frac{h^3}{2!} f''(m) \int_0^1 (u-1)u du = -\frac{h^3}{12} f''(m)$$

$$|h^{-1} T_j| = O(h^2)$$

۲- روش آدامز مولتون مرتبه سوم (دوگامی)

چنان چه در رابطه (۲) تا تفاضل مرتبه دوم را به عنوان تقریب استفاده کنیم داریم:

$$y_{j+1} = y_j + H \left[f_{j+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{j+1} - \frac{1}{12} \nabla^2 f_{j+1} \right]$$

$$y_{j+1} = y_j + H \left[f_{j+1} - \frac{1}{2} (f_{j+1} - f_j) - \frac{1}{12} (f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) \right] \quad j = 1(1)n-1$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{12} [5f_{j+1} + 8f_j - f_{j-1}]$$

$$T_{j+1} = \frac{h^4}{3!} f'''(m) \int_0^1 (u-1)u(u+1) du = -\frac{h^4}{24} f'''(m)$$

$$|h^{-1} T_j| = O(h^3)$$

۳- روش آدامز مولتون مرتبه چهارم (سه گامی):

چنان چه در رابطه (۲) تا تفاضل مرتبه سوم را به عنوان تقریب استفاده نماییم داریم:

$$y_{j+1} = y_j + h \left[f_{j+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{j+1} - \frac{1}{12} \nabla^2 f_{j+1} - \frac{1}{24} \nabla^3 f_{j+1} \right]$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24} [9 f_{j+1} + 19 f_j - 5 f_{j-1} + f_{j-2}] \quad j = 2(1)n-1$$

$$T_{j+1} = \frac{h^5}{4!} f^{(4)}(m) \int_0^1 (u-1)u(u+1)(u+2) du = -\frac{19h^5}{720} f^{(4)}(m)$$

$$|h^{-1} T_j| = O(h^4)$$

روش های پیشگو اصلاحگر (PCM: Predicted Corrected Method)

P:

$$y_j^{(0)} = \sum_{i=1}^k a_i y_{j-i+1}^{(0)} + h \sum_{i=1}^k b_i f_{j-i+1}^{(0)}$$

و به طور کلی :

C:

$$y_{j+1}^{(r+1)} = \sum_{i=1}^k a_i y_{j-i+1}^{(r)} + h b_0 f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(r)}) + h \sum_{i=1}^k b_i f_{j-i+1}^{(r)} \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

ابتدا با استفاده از یک روش چندگامی صریح جواب معادله را پیشگویی می کنیم

$$P: y_{j+1}^{(0)}$$

سپس با استفاده از جواب مرحله پیشگویی جمله ضمنی کننده روش اصلاحگر را محاسبه می کنیم

$$E: f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(0)})$$

در مرحله آخر با استفاده از موارد فوق جواب مرحله تصحیح را می یابیم

$$C: y_{j+1}^{(1)}$$

این عمل را مجدداً تکرار می کنیم فرض می کنیم n بار این عمل را تکرار کردیم در نتیجه داریم:

$$PECECEC \dots EC \equiv P(EC)^n \quad n=1,2,\dots$$

یعنی یکبار پیشگویی می کنیم و n بار محاسبه و اصلاح می کنیم.

مثال:

مسئله زیر را با روشهای پیشگو اصلاحگر مرتبه سوم تا دو مرحله تکرار ($r=0,1$) حل کنید.

$$y' = x + y$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 1$$

$$h = 0.2$$

(حل)

$$n = \frac{1-0}{0.2} = 5$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_0 = 0 & x_1 = 0.2 \\ x_2 = 0.4 & x_3 = 0.6 \\ x_4 = 0.8 & x_5 = 1 \end{array} \right\}$$

ابتدا با روش آدامز بشفورت مرتبه سوم پیشگویی می کنیم:

P :

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{12} [23 f_j - 16 f_{j-1} + 5 f_{j-2}]$$

$$y_{j+1}^{(0)} = y_j + \frac{1}{60} [23(x_j + y_j) - 16(x_{j-1} + y_{j-1}) + 5(x_{j-2} + y_{j-2})] \quad j=2(1)4$$

حال با روش آدامز مولتون مرتبه سوم تصحیح می کنیم:

C :

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{12} [5 f_{j+1} + 8 f_j - f_{j-1}]$$

$$y_{j+1}^{(r+1)} = y_j + \frac{0.2}{12} [5(x_{j+1} + y_{j+1}^{(r)}) + 8(x_j + y_j) - (x_{j-1} + y_{j-1})]$$

$$y = -x - 1 + 2e^x \Rightarrow y_1 = y(x_1 = 0.2) = 1.242806$$

$$y_2 = 1.583649$$

for(j = 2; j ≤ 4; j++)
 for(r = 0; r ≤ 1; r++)

$$y_3^{(0)} = y_2 + \frac{1}{60} [23(x_2 + y_2) - 16(x_1 + y_1) + 5(x_0 + y_0)] = 2.042634$$

$$y_3^{(1)} = y_2 + \frac{0.2}{12} [5(x_3 + y_3^{(0)}) + 8(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)] = 2.044309$$

$$y_3^{(2)} = y_2 + \frac{0.2}{12} [5(x_3 + y_3^{(1)}) + 8(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)] = 2.044448$$

$$y_4^{(0)} = y_3^{(2)} + \frac{1}{60} [23(x_3 + y_3^{(2)}) - 16(x_2 + y_2) + 5(x_1 + y_1)] = 2.649430$$

$$y_4^{(1)} = y_3^{(2)} + \frac{0.2}{12} [5(x_4 + y_4^{(0)}) + 8(x_3 + y_3^{(2)}) - (x_2 + y_2)] = 2.651433$$

$$y_4^{(2)} = 2.651599$$

$$y_5^{(0)} = y_4^{(2)} + \frac{1}{60} [23(x_4 + y_4^{(2)}) - 16(x_3 + y_3^{(2)}) + 5(x_2 + y_2)] = 3.434831$$

$$y_5^{(1)} = y_4^{(2)} + \frac{0.2}{12} [5(x_5 + y_5^{(0)}) + 8(x_4 + y_4^{(2)}) - (x_3 + y_3^{(2)})] = 3.437308$$

$$y_5^{(2)} = 3.437515$$

حل عددی مسائل مقدار مرزی

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را در نظر می گیریم :

$$y'' = f(x, y, y') \quad a \leq x \leq b \quad (1)$$

این معادله می تواند با شرایط مرزی نوع اول همراه باشد مانند:

$$y(a) = a \quad , \quad y(b) = b$$

یا با شرایط مرزی نوع دوم مانند:

$$y'(a) = a \quad , \quad y'(b) = b$$

و یا با شرایط مرزی نوع سوم مانند:

$$c_1 y'(a) + c_2 y(a) = d_1 \quad , \quad c_3 y'(b) + c_4 y(b) = d_2$$

مسئله مقدار مرزی (۱) دارای جواب منحصر به فرد است و قضیه زیر این موضوع را روشن می سازد.

قضیه:

معادله (۱) دارای جواب منحصر به فرد $y(x)$ است و در یکی از شرایط مرزی داده شده صدق می کند

اگر $f(x, y, y')$ در ناحیه $D: \{(x, y, y') \mid a \leq x \leq b, -\infty < y, y' < \infty\}$ پیوسته باشد همچنین

دارای مشتقات نسبی اول $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ پیوسته در ناحیه D باشد و $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ و $\forall (x, y, y') \in D:$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y'} \right| < M \quad \forall (x, y, y') \in D \text{ باشد.}$$

معادله (۱) نسبت به y و y' می تواند خطی و یا غیر خطی باشد.

اگر معادله (۱) خطی باشد آن گاه

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \quad (2)$$

تعمیم قضیه در مورد معادله خطی

معادله (۱) دارای جواب منحصر به فرد است اگر توابع $p(x)$ ، $q(x)$ و $r(x)$ در $[a, b]$ پیوسته باشند

و

$$|p(x)| < M \quad \text{و} \quad q(x) > 0$$

روش تفاضلی مرتبه دوم

حال مسئله مقدار مرزی با شرایط مرزی نوع اول را در نظر می گیریم:

مثال:

با روش تفاضلی مرتبه دوم مسئله زیر را حل کنید.

$$y'' = -3y' + 2y + (2x+3)$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 2$$

$$y(1) = 1$$

$$h = 0.2$$

حل

$$r(x) = 2x + 3$$

$$p(x) = -3$$

$$q(x) = 2 > 0$$

تمام توابع پیوسته اند. $p(x)$ کرندار و $q(x)$ مثبت است. پس شرایط قضیه قبل حاکم است و ما دارای

جواب منحصر به فرد هستیم.

$$n = \frac{1-0}{0.2} = 5 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 & x_1 = 0.2 \\ x_2 = 0.4 & x_3 = 0.6 \\ x_4 = 0.8 & x_5 = 1 \end{cases}$$

حال ماتریس فوق را تشکیل می دهیم.

$$\begin{bmatrix} -2.08 & 1.3 & 0 & 0 \\ 0.7 & -2.08 & 1.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & -2.08 & 1.3 \\ 0 & 0 & 0.7 & -2.08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04(2x_1 + 3) - 2(0.7) \\ 0.04(2x_2 + 3) \\ 0.04(2x_3 + 3) \\ 0.04(2x_4 + 3) - 1.3 \end{bmatrix}$$

این دستگاه توسط روش حذفی گاوس به سادگی حل می شود.

روش نیومرو

مسئله مقدار مرزی با شرایط مرزی نوع اول زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y), \quad a \leq x \leq b \\ y(a) &= a \\ y(b) &= b \end{aligned} \quad (1)$$

بازه $[a, b]$ را به n زیر بازه با گام مساوی افراز می کنیم:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_j = a + jh, \quad j = 0(1)n$$

معادله دیفرانسیل داده شده را در x_j در نظر می گیریم:

$$y''(x_j) = f(x_j, y(x_j)) \quad j = 1(1)n \quad (2)$$

حال مشتق مرتبه دوم را با یک فرمول سه نقطه ای و تابع f را در سه نقطه با ضرایب نامعین تقریب می

زنیم:

$$y(x_{j-1}) - 2y(x_j) + y(x_{j+1}) = h^2 \{b_0 f(x_{j-1}, y(x_{j-1})) + b_1 f(x_j, y(x_j)) + b_2 f(x_{j+1}, y(x_{j+1}))\} + T_j \quad (3)$$

برای تعیین ضرایب نامعین کافی است که از رابطه (۲) استفاده کنیم و همچنین $y(x_{j-1})$ ، $y(x_{j+1})$ ،

$y''(x_{j-1})$ و $y''(x_{j+1})$ را حول x_j با سری تیلور بسط دهیم.

$$\begin{aligned} L.H.S: & y(x_j) - hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_j) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_j) - \dots - 2y(x_j) \\ & + y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_j) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_j) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R.H.S: & h^2 \{ b_0 [y''(x_j) + 2 \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_j) + 2 \frac{h^6}{6!} y^{(6)}(x_j) + \dots = h^2 \{ b_0 y''(x_j) - \\
 & h y'''(x_j) + \frac{h^2}{2!} y^{(4)}(x_j) - \frac{h^3}{3!} y^{(5)}(x_j) + \frac{h^4}{4!} y^{(6)}(x_j) + \dots] \\
 & + b_1 y''(x_j) + b_2 [h y''(x_j) + \frac{h^2}{2!} y'''(x_j) + \frac{h^3}{3!} y^{(4)}(x_j) + \frac{h^4}{4!} y^{(5)}(x_j) + \\
 & \dots] \} + T_j
 \end{aligned}$$

رابطه فوق را می کنیم.

$$\begin{aligned}
 R.H.S: & (b_0 + b_1 + b_2) h^2 y''(x_j) + (b_2 - b_0) h^3 y'''(x_j) + \\
 & (b_2 + b_0) \frac{h^4}{2!} y^{(4)}(x_j) + (b_2 - b_0) \frac{h^5}{3!} y^{(5)}(x_j) \\
 & + (b_2 - b_0) \frac{h^6}{4!} y^{(6)}(x_j) + \dots + T_j
 \end{aligned}$$

با متحد قرار دادن روابط سمت راست با سمت چپ می توان روابط زیر را به دست آورد که از این روابط می توان مجهولات را محاسبه نمود.

$$b_0 + b_1 + b_2 = 1$$

$$b_2 - b_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = b_2 = \frac{1}{12}, \quad b_1 = \frac{10}{12}$$

$$b_2 + b_0 = \frac{1}{6}$$

خطای برشی روش نیومرو عبارت است از اولین جمله ناصفر متناظر با مجهولات محاسبه شده فوق که

به صورت زیر می یابیم:

$$T_j = \frac{1}{6} \frac{h^6}{4!} Y^{(6)}(c) = \frac{1}{144} h^6 Y^{(6)}(c)$$

بنابراین خطای برشی دارای دقت مرتبه $\alpha(h^6)$ است لذا نتیجه می گیریم که روش نیومرو دارای دقت مرتبه پنجم می باشد.

الگوریتم روش:

$$y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1} = \frac{h^2}{12} [f_{j-1} + 10f_j + f_{j+1}] \quad j=1(1)n-1$$

مثال:

مسئله زیر را با روش نیومرو حل کنید.

$$y'' = \frac{2}{x^2} y + (2x+3)$$

$$y(2) = y(3) = 0$$

$$h = 0.2$$

(حل)

$$n = \frac{3-2}{0.2} = 5 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 & x_1 = 2.2 \\ x_2 = 2.4 & x_3 = 2.6 \\ x_4 = 2.8 & x_5 = 3 \end{cases}$$

$$y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1} = \frac{1}{300} \left[\left(\frac{2}{x_{j-1}^2} y_{j-1} + 2x_{j-1} + 3 \right) + 10 \left(\frac{2}{x_j^2} y_j + 2x_j + 3 \right) + \left(\frac{2}{x_{j+1}^2} y_{j+1} + 2x_{j+1} + 3 \right) \right] \quad j=1(1)4$$

با جایگذاری در معادله بالا داریم:

$$\begin{bmatrix} -2.0137 & 0.9988 & 0 & 0 \\ 0.9988 & -2.0115 & 0.9990 & 0 \\ 0 & 0.9988 & 2.0098 & 0.9991 \\ 0 & 0 & 0.9990 & 2.0085 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.296 \\ 0.312 \\ 0.3266 \\ 0.3307 \end{bmatrix}$$

این دستگاه با روش حذفی گاوس به راحتی حل می گردد.

حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE)

فرم کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به صورت زیر است:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \quad (1)$$

که در آن A و B و C یا توابعی از x و y هستند یا توابعی از $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$.

اگر A و B و C توابعی از x و y و F یک تابع خطی نسبت به u و $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ باشد آن گاه

معادله دیفرانسیل (1) معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم نامیده می شود که دارای جواب $u(x, y)$

است. یعنی:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Hu + G = 0$$

که در آن A و B و C هم می توانند ثابت باشند و هم تابعی از x و y .

اگر در این معادله $G = 0$ معادله همگن و در غیر این صورت معادله ناهمگن خوانده می شود.

حالت (۱) اگر $B^2 - AC = 0$ باشد معادله فوق از نوع سهموی است که معادله گرما از جمله اینهاست.

در این صورت داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

حالت (۲) اگر $B^2 - AC > 0$ معادله فوق از نوع هذلولوی است که معادله موج از این دسته است.

حالت (۳) اگر $B^2 - AC < 0$ باشد معادله فوق از نوع بیضوی است و معادله لاپلاس (پواسون) از

جمله اینهاست.

معادله گرما در فضای یک بعدی

معادله انتقال حرارت در فضای یک بعد چنانچه تمامی ثابتهای فیزیکی را واحد انتخاب نماییم

عبارت است از:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad a \leq x \leq b, t > 0 \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = f(x) \\ u(a, t) = g_1(t) \\ u(b, t) = g_2(t) \end{array} \right\} (*)$$

هدف ما یافتن جواب معادله فوق یعنی $u(x, t)$ است که در معادله (1) و در شرایط مرزی و اولیه (*)

که به شرایط مرزی دیریکله معروف است صدق کند.

روش تفاضلی برای حل عددی به صورت کلی زیر است:

بازه $[a, b]$ را به M زیر فاصله با گام مساوی h افراز می کنیم و همچنین بازه $[0, T]$ را به N زیر بازه با

گام مساوی k افراز می کنیم بنابراین داریم:

$$h = \frac{b-a}{M}$$

$$x_m = a + mh \quad m = 0(1)M$$

$$k = \frac{T}{N}$$

$$t_n = nk \quad n = 0(1)N$$

شبكة عمومی نقاط فوق را که عبارت است از (x_m, t_n) در نظر می گیریم و معادله دیفرانسیل را در این

شبكة نقاط گسسته می سازیم. برای آسانی کار فرض می کنیم

$$u(x_m, t_n) = U_m^n \quad (\text{Exact solution})$$

$$u_m^n \quad (\text{approximate Solution})$$

روش صریح اشمیت برای حل عددی معادله گرما در فضای تک بعدی:

معادله دیفرانسیل رابطه (۱) را در مجموعه نقاط گسسته در نظر می گیریم:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{(x_m, t_n)} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(x_m, t_n)} \quad (2)$$

با استفاده از فرضیات فوق داریم:

$$\frac{\partial U_m^n}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2} \quad (3)$$

حال با استفاده از فرمول تفاضلی پیشرو مرتبه اول برای تقریب مشتق نسبی مرتبه اول نسبت به t و با

استفاده از فرمول تفاضل مرکزی مرتبه دوم برای تقریب مشتق نسبی مرتبه دوم نسبت به x داریم:

$$\begin{aligned} \Delta_t U_m^n + O(k) &= d_x^2 U_m^n + O(h^2) \\ \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k) &= \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} + O(h^2) \end{aligned} \quad (4)$$

با استفاده از رابطه (۴) در رابطه (۳) و با استفاده از ضرب k در طرفین رابطه نهایتاً داریم:

$$U_m^{n+1} - U_m^n = \frac{k}{h^2} [U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n] + k[O(k + h^2)]$$

باانتخاب

$$I = \frac{k}{h^2}$$

داریم:

$$U_m^{n+1} - U_m^n = I[U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n] + k[O(k + h^2)]$$

حال اگر از خطای برشی رابطه فوق صرف نظر کنیم داریم:

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} - u_m^n &= I[u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n] \\ u_m^{n+1} &= I u_{m-1}^n + (1 - I)u_m^n + I u_{m+1}^n \quad n = 0(1)N-1, m = 1(1)M-1 \end{aligned} \quad (5)$$

رابطه فوق را روش تفاضلی اشمیت می نامند. برای تعیین دقت روش به شرح زیر عمل می کنیم:

دقت روش : خطای برشی روش فوق عبارت است از:

$$T_m^n = U_m^{n+1} - \frac{k}{h^2} U_{m-1}^n - (1 - \frac{2k}{h^2}) U_m^n - \frac{k}{h^2} U_{m+1}^n \quad (6)$$

حال رابطه (۶) را با استفاده از سری تیلور حول (x_m, t_n) بسط می دهیم. بنابراین داریم:

$$T_m^n = U_m^n + k \frac{\partial U_m^n}{\partial t} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial t^2} + \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 U_m^n}{\partial t^3} + \dots - \frac{k}{h^2} \left\{ U_m^n - h \frac{\partial U_m^n}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 U_m^n}{\partial x^3} + \dots \right\} - (1-2I) U_m^n - I \left\{ U_m^n + h \frac{\partial U_m^n}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 U_m^n}{\partial x^3} + \dots \right\}$$

رابطه فوق را ساده می کنیم:

$$T_m^n = k \underbrace{\left(\frac{\partial U_m^n}{\partial t} - \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2} \right)}_* + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial t^2} - \frac{kh^2}{12} \frac{\partial^4 U_m^n}{\partial x^4} + \dots$$

با استفاده از رابطه (۳) داریم:

$$T_m^n = \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial t^2} - \frac{kh^2}{12} \frac{\partial^4 U_m^n}{\partial x^4} + \dots$$

بنابراین دقت خطای برشی روش اشمیت عبارت است از:

$$T_m^n = O(k^2 + kh^2)$$

با تقسیم بر k رابطه فوق دقت روش اشمیت را به صورت زیر می یابیم:

$$k^{-1} T_m^n = O(k + h^2)$$

بنابراین روش فوق دارای دقت $O(k + h^2)$ است. این روش مشروط پایدار است و اگر $I \leq \frac{1}{2}$ روش همواره پایدار است.

روش اشمیت روشی است دو لایه ای و صریح. فرم سلولی روش فوق عبارت است از:

(شکل)

روش ضمنی لاسنن برای حل عددی معادله گرما در یک فضای تک بعدی:

حال اگر مشتق نسبی مرتبه اول نسبت به t در طرف چپ رابطه (۳) را با استفاده از یک فرمول مشتق

گیری پسرو مرتبه اول تقریب بزیم و سمت راست این رابطه را با یک فرمول تفاضل مرکزی مرتبه دوم

تقریب بزیم داریم:

$$\nabla_t U_m^n = d_x^2 U_m^n$$

$$\frac{U_m^n - U_m^{n-1}}{k} + O(k) = \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{h^2} + O(h^2) \quad (7)$$

حال اگر رابطه (۷) را در رابطه (۳) قرار دهیم و طرفین این رابطه را در k ضرب کنیم داریم:

$$U_m^n - U_m^{n-1} = I(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) + O(k^2 + kh^2)$$

حال چنان چه از خطای برشی رابطه فوق صرف نظر کنیم و هم چنین با تغییر n به $n+1$ داریم:

$$u_m^n = -I u_{m-1}^{n+1} + (1+2I)u_m^{n+1} - I u_{m+1}^{n+1} \quad m=1(1)M-1, n=0(1)N-1 \quad (8)$$

روش فوق روش لاسنن نامیده می شود که روشی ضمنی و دو لایه ای است که فرم سلولی آن عبارت است از:

(شکل)

دقت روش :

خطای برشی روش لاسنن عبارت است از:

$$T_m^n = -\frac{k}{h^2} U_{m-1}^{n-1} + \left(1 + \frac{2k}{h^2}\right) U_m^{n-1} - \frac{k}{h^2} U_{m+1}^{n-1} - U_m^n$$

رابطه فوق را با استفاده از سری تیلور حول (x_m, t_n) بسط می دهیم داریم:

$$\begin{aligned} T_m^n = & -\frac{k}{h^2} \left[U_m^n + \left(k \frac{\partial U_m^n}{\partial t} - h \frac{\partial U_m^n}{\partial x} \right) + \frac{1}{2!} \left(k^2 \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial t^2} - 2kh \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x \partial t} + h^2 \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2} \right) \right. \\ & + \frac{1}{3!} \left(k^3 \frac{\partial^3 U_m^n}{\partial t^3} - 3k^2 h \frac{\partial^3 U_m^n}{\partial t^2 \partial x} + 3kh \frac{\partial^3 U_m^n}{\partial t \partial x^2} - h^3 \frac{\partial^3 U_m^n}{\partial x^3} \right) + \dots + (1 + 2I) [U_m^n \\ & \left. + k \frac{\partial U_m^n}{\partial t} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial t^2} + \dots \right] - U_m^n \end{aligned}$$

با ساده کردن رابطه فوق داریم:

$$T_m^n = k \underbrace{\left(\frac{\partial U_m^n}{\partial t} - \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2} \right)}_* + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial t^2} - \frac{kh^2}{12} \frac{\partial^4 U_m^n}{\partial x^4} + \dots$$

با استفاده از رابطه (۳) رابطه فوق به صورت زیر ساده می شود:

$$T_m^n = \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial t^2} - \frac{kh^2}{12} \frac{\partial^4 U_m^n}{\partial x^4} + \dots$$

لذا نتیجه می گیریم که خطای برشی روش لاسنن عبارت است از:

$$T_m^n = O(k^2 + kh^2)$$

بنابراین دقت روش لاسنن عبارت است از:

$$k^{-1} T_m^n = O(k + h^2)$$

این روش برای $I \leq \frac{1}{6}$ پایدار است لذا روش را مشروط پایدار نامند.

روش کرانک- نیکلسون :

این روش در واقع ترکیبی از دو روش قبلی است.

ساده ترین روش برای اثبات فرمول عبارت است از میانگین گرفتن از دو روش فوق. بنابراین دوروش

فوق را در نظر می گیریم:

$$u_m^{n+1} = I u_{m-1}^n + (1-I)u_m^n + I u_{m+1}^n \quad n = 0(1)N-1, m = 1(1)M-1 \quad (9)$$

$$u_m^n = -I u_{m-1}^{n+1} + (1+2I)u_m^{n+1} - I u_{m+1}^{n+1} \quad m = 1(1)M-1, n = 0(1)N-1 \quad (10)$$

و حال میانگین دو روش فوق:

$$-\frac{I}{2} u_{m-1}^{n+1} + (1+I)u_m^{n+1} - \frac{I}{2} u_{m+1}^{n+1} = \frac{I}{2} u_{m-1}^n + (1-I)u_m^n + \frac{I}{2} u_{m+1}^n$$

$$n = 0(1)N-1, m = 1(1)M-1$$

فرم اپراتوری این روش عبارت است از:

$$(1 - \frac{I}{2} d_x^2) u_m^{n+1} = (1 + \frac{I}{2} d_x^2) u_m^n \quad n = 0(1)N-1, m = 1(1)M-1 \quad (11)$$

این روش را روش کرانک نیکلسون نامند که روشی دو لایه ای و ضمنی است. فرم سلولی این روش

عبارت است از:

(شکل)

دقت روش :

خطای برشی روش عبارت است از میانگین خطای برشی دو روش اشمیت و لاسن:

$$T_m^n = \frac{T_{ms}^n + T_{ml}^n}{2} = k \underbrace{\left(\frac{\partial U_m^n}{\partial t} - \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2} \right)}_* + \frac{k^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U_m^n}{\partial t} - \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2} \right) -$$

$$\frac{k}{h^2} \frac{\partial^4 U_m^n}{\partial x^4} - \frac{k^3}{4} \frac{\partial^4 U_m^n}{\partial x^2 \partial t^2} + \dots = O(k^3 + kh^2)$$

با استفاده از رابطه (۳) داریم:

$$T_m^n = kh^2 \frac{\partial^4 U_m^n}{\partial x^4} - \frac{k^3}{4} \frac{\partial^4 U_m^n}{\partial x^2 \partial t^2} + \dots = O(k^3 + kh^2)$$

لذا نتیجه می گیریم که دقت روش عبارت است از:

$$k^{-1} T_m^n = O(k^2 + h^2)$$

ضمناً این روش همواره پایدار است یعنی با انتخاب هر I ای روش همگرا می شود.

روش ریچاردسون:

حال چنانچه مشتق نسبی مرتبه اول نسبت به t را در رابطه (۳) با یک فرمول مشتق گیری نسبی مرتبه دوم

تقریب بزنیم داریم:

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^{n-1}}{2k} + O(k^2) = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} + O(h^2)$$

چنان چه رابطه فوق را در $2k$ ضرب کنیم و با استفاده از $I = \frac{k}{h^2}$ داریم:

$$U_m^{n+1} - U_m^{n-1} = I(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) + O(k^2 + kh^2)$$

چنان چه از خطای برشی صرف نظر کنیم داریم:

$$u_m^{n+1} = 2I(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + u_m^{n-1} \quad n = 1(1)N-1 \quad m = 1(1)M-1 \quad (12)$$

روش فوق را روش ریچاردسون می نامند که روشی سه لایه ای و صریح است. فرم سلولی عبارت است از:

(شکل)

دقت روش:

خطای برشی رو شریچاردسون عبارت است از:

$$T_m^n = U_m^{n+1} - 2I(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) - U_m^{n-1}$$

با بسط سری تیلور حول (x_m, t_n) و با استفاده از رابطه (۳) نهایتاً داریم:

$$T_m^n = O(k^3 + kh^2)$$

بنابراین دقت روش عبارت است از:

$$k^{-1} T_m^n = O(k^2 + h^2)$$

روش دافورت - فرنکل:

اگر در روش ریچاردسون از تقریب زیر استفاده کنیم:

$$u_m^n \cong \frac{1}{2}(u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) \quad (1)$$

داریم:

$$(1+2I)u_m^{n+1} = 2I(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n) + (1-2I)u_m^{n-1}$$

$$n = 0(1)N-1 \quad m = 1(1)M-1$$

حال اگر طرفین رابطه را در $1+2I$ تقسیم کنیم داریم:

$$u_m^{n+1} = \frac{2I}{1+2I}(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n) + \frac{1-2I}{1+2I}u_m^{n-1} \quad n = 0(1)N-1 \quad m = 1(1)M-1 \quad (13)$$

روش فوق روشی است سه لایه ای و صریح که فرم سلولی آن عبارت است از:

دقت روش:

خطای برشی روش دافورت - فرنکل عبارت است از:

$$T_m^n = (1 + 2I)U_m^{n+1} - 2I(U_{m-1}^n + U_{m+1}^n) + (1 - 2I)U_m^{n-1}$$

چنان چه رابطه فوق را با استفاده از سری تیلور بسط دهیم و ساده کنیم داریم:

$$T_m^n = O(k^3 + kh^2)$$

لذا نتیجه می گیریم که دقت روش عبارت است از:

$$k^{-1} T_m^n = O(k^2 + h^2)$$

ضمناً این روش از روش قبلی پایدارتر است.

مثال ۱:

با استفاده از روش اشمیت و $h = \frac{1}{3}$, $k = \frac{1}{36}$ معادله زیر را برای دو لایه $n = 0, 1$ حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t > 0 \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = \sin px \\ u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{array} \right.$$

(حل)

$$\frac{1}{3} = \frac{1-0}{M} \Rightarrow M = 3$$

$$x_m = mh \quad m = 0(1)3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_0 = 0 & x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{2}{3} & x_3 = 1 \end{array} \right\}$$

$$t_n = nk \quad n = 0,1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} t_0 = 0 & t_1 = \frac{1}{36} \end{array} \right\}$$

$$I = \frac{k}{h^2} = \frac{1}{\frac{36}{1}} = \frac{1}{4}$$

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{4}(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n) + \frac{1}{2}u_m^n$$

$$4u_m^{n+1} = u_{m-1}^n + u_{m+1}^n + 2u_m^n$$

for ($n=0; n \leq 1; n++$)

for ($m=1; m \leq 2; m++$)

$n=0$

$m=1,2$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4u_1^1 = u_0^0 + 2u_1^0 + u_2^0 = \sin px_0 + 2 \sin px_1 + \sin px_2 = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4u_2^1 = u_1^0 + 2u_2^0 + u_3^0 = \sin px_1 + 2 \sin px_2 + \sin px_3 = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow u_1^1 = \frac{3}{8}\sqrt{3} \quad u_2^1 = \frac{3}{8}\sqrt{3}$$

$n=1$

$m=1,2$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4u_1^2 = u_0^1 + 2u_1^1 + u_2^1 \\ 4u_2^2 = u_1^1 + 2u_2^1 + u_3^1 \end{array} \right\} \Rightarrow u_1^2 = \frac{9}{32}\sqrt{3} \quad u_2^2 = \frac{9}{32}\sqrt{3}$$

مثال ۲:

مساله زیر را با استفاده از روش کرانک نیکلسون برای دو لایه حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t > 0 \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,0) = \sin px \\ u(0,t) = t^2 \\ u(1,t) = 2t \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow u_2^1 = 0.5567 \quad u_1^1 = 0.6742$$

(حل)

$$n = 1$$

$$m = 1, 2$$

$$u_0^2 = u(0, t_2) = t_2^2 \quad t_2 = 2k = 2\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{1}{18}$$

$$u_3^2 = u(1, t_2) = 2t_2 = \frac{1}{9}$$

$$u_0^1 = u(0, t_1) = t_1^2 = \left(\frac{1}{36}\right)^2$$

$$u_3^1 = u(1, t_1) = 2t_1 = \frac{1}{18}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_0^2 + 10u_1^2 - u_2^2 = u_0^1 + 6u_1^1 + u_2^1 \\ -u_1^2 + 10u_2^2 - u_3^2 = u_1^1 + 6u_2^1 + u_3^1 \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} -u_1^2 + 10u_2^2 = u_1^1 + 6u_2^1 + \frac{1}{6} \\ 10u_1^2 - u_2^2 = 6u_1^1 + u_2^1 + \left[\frac{1}{(18)^2} + \frac{1}{(36)^2} \right] \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow u_1^2 = 0.5275 \quad u_2^2 = 0.5443$$

تمرینهای فصل سوم

۱- مسئله مقدار اولیه زیر مفروض است: $y' = x + \sin(y)$, $y(0) = 1$

این مسئله را با روشهای اویلر پیراسته اویلر روشهای مراتب مختلف رانگ - کوتاه با گام $h=0.1$ حل کنید و جواب تقریبی $y(0.4)$ را بیابید.

۲- مسئله مقدار اولیه زیر مفروض است: $y' = x(y+x) - 2$, $y(0) = 2$

الف: با استفاده از روش اویلر و گامهای $h=0.15, h=0.2, h=0.3$ جواب تقریبی معادله رادر $y(0.6)$ بیابید. (محاسبات تا ۵ رقم اعشار)

ب: مسئله را با گامهای مندرج در فوق با روشهای مرتبه دوم رانگ - کوتاه و پیراسته اویلر حل کنید.

۳- با استفاده از روش کلاسیک رانگ- کوتاه مرتبه چهارم جواب تقریبی مسئله زیر را در $x=0.8$ بیابید
 به طوری که $h=0.2$ باشد. $y' = \sqrt{x+y}, y(0.4) = 0.41$

۴- مسئله مقدار اولیه زیر مفروض است: $y' = \frac{(y+x)}{(y-x)}, y(0) = 1$
 با گام $h=0.2$ جواب مسئله را در $y(0.4)$ با روش رانگ- کوتاه مرتبه سوم کلاسیک بیابید.

۵- جواب تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را در نقطه $x=0.3$ با استفاده از روش آدامز- بشفورت مرتبه دوم و با گام $h=0.1$ بیابید. $y' = x - y^2, y(0) = 1$
 برای شروع روش از روش رانگ- کوتاه مرتبه دوم کلاسیک استفاده کنید.

۶- روش مرتبه چهارم به فرم: $y_{j+1} = ay_{j-2} + h(by'_j + cy'_{j-1} + dy'_{j-2} + ey'_{j-3})$
 برای حل معادله $y' = f(x, y)$ تعیین کنید و خطای آنرا بیابید.

۷- برای حل معادله: $y' = f(x, y), y(0) = y_0$
 روش زیر پیشنهاد می شود. خطای برشی این روش را بیابید و مرتبه دقت آنرا تعیین کنید.
 $y_{j+1} = \frac{18}{19}(y_j - y_{j-2}) + y_{j-3} + \frac{4h}{19}(f_{j+1} + 4f_j + 4f_{j-2} + f_{j-3})$

۸- a, b, c را بطریقی بیابید که روش چند گامی: $y_{j+1} = (1-a)y_j + ay_{j-1} + h(by'_{j+1} + cy'_j + dy'_{j-1})$
 دارای حداکثر مرتبه دقت برای حل مسئله مقدار اولیه $y' = f(x, y)$ گردد.

۹- مسئله مقدار مرزی زیر مفروض است: $x^2 y'' - 2y + x = 0, x \in [2, 3], y(2) = y(3) = 0$
 با استفاده از روشهای تفاضلی مرتبه دوم و روش نیومر و با گام $h=0.1, h=0.25$ حل کنید.

۱۰- با استفاده از یک روش مرتبه دوم تفاضلی مسئله مقدار مرزی $y'' = xy + 1, x \in [0, 1]$
 $y(0) + y'(0) = 1, y(1) = 1$
 را با گام $h=0.25$ حل کنید.