بسمه تعالی

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل - دانشکده فنی و مهندسی

۱) جواب عمومی معادلهٔ بسل زیر را برحسب توابع مثلثاتی بدست آورید.

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)y = 0$$

۲) معادلهٔ انتگرالی زیر را با شرط $F(0)=0$ حل کنید.

$$F'(x) = \sin x + \int_0^x F(x-u)\cos u \, du$$

۳) جوابی به صورت سری فروبنیوس برای معادلهٔ زیر در مجاورت مبدأ بیابید. $(x>0)$

$$x^2y'' + 3xy' + (1-2x)y = 0$$

۴) مطلوبست محاسبهٔ :

الف) $\int_{-1}^{1} \left(P_4(x) + P_9(x)\right)^2 dx$

ب) $L\left[\int_0^x x.e^{5t-4x} . \sin\sqrt{2}\, t \, dt\right]$

ج) $L\left[\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2} dt\right] \quad , \quad x>0$

د) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ ، برحسب تابع گاما

ه) $\int_0^\infty \frac{\sin 3x}{2x} dx$

موفق باشید . خرازی

«بسمه تعالی»

مدت: ۲ ساعت — امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

۱- به کمک تبدیل لاپلاس جواب دستگاه زیر را با شرایط اولیه $x(0)=x'(0)=y(0)=0$ بدست آورید؟

$$\begin{cases} x'-y'=2x-2y+\sin t \\ x''+2y'+x=0 \end{cases} \qquad (x=x(t)\,,\ y=y(t))$$

۲- مطلوبست محاسبه تبدیلات زیر

الف) $L\left[t^{2}e^{-t}\int_0^t e^{2u}\sin 3u\,du\right]$

ب) $L^{-1}\left[\cot^{-1}(p+4)\right]$

۳- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر حول $x=0$ را با کمک سریها بیابید. سپس با فرض $\lambda=2$ جوابی از معادله به صورت چندجمله‌ای متناهی بنویسید؟

$$y''-2xy'+\lambda xy=0 \qquad \text{(معادله هرمیت)}$$

۴- با استفاده از سری فوق هندسی جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را حول مبدأ بیابید؟

$$(x-x^2)y''+4(1-x)y'-2y=0$$

۵- مطلوبست محاسبه انتگرال زیر؟ ($P_n(x)$ چندجمله‌ای لژاندر مرتبه n است)

$$\int_{-1}^{1}\left[(3x^2-1)+2P_8(x)\right]P_8(x)\,dx$$

۶- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را حول نقطه غیرعادی منظم آن بیابید؟

$$2x^2y''+xy'-(1+x)y=0$$

موفق باشید- گروه ریاضی

آزمون پایان ترم معادلات دیفرانسیل

۱- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$ را بیابید.

۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس بیابید:

$$xy'' + (2x+3)y' + (x+3)y = 3e^{-x} \quad ، \quad y(0)=0$$

۳- مطلوبست محاسبه $L\left[\int_0^x \sqrt{\frac{1}{x-t}}\, e^{3t} \sin 2t \, dt\right]$

۴- جواب عمومی معادله فوق هندسی $4(x^2-1)y'' + 4xy' - y = 0$ را حول مبداء بیابید.

۵- معادله دیفرانسیل بسل با $p=\frac{3}{2}$ را تشکیل دهید. سپس جواب عمومی آنرا برحسب توابع مقدماتی مثلثاتی سینوس و کسینوس بدست آورید.

۶- سه جمله اول بسط لژاندر تابع $y=\begin{cases} 2-x & 0 < x \le 1 \\ 0 & -1 < x < 0 \end{cases}$ را بدست آورید.

۷- جوابی به صورت سری فروبنیوس برای معادله دیفرانسیل زیر در مجاورت مبداء بیابید:

$$x^2y'' + x(3+x)y' + (1+3x)y = 0$$

موفق باشید - خرازی

زمان: ۱۱۰ دقیقه

بسم تعالی

آزمون معادلات دیفرانسیل   زمان ۲ ساعت

۱- اگر r تابعی برداری از t و a و w مقادیر ثابتی باشند جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را در حالات مختلف بدست آورده و در صورت لزوم بحث کنید.

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + 2a\frac{dr}{dt} + w^2 \cdot r = 0$$

۲- مسیرهای متعامد دسته دوایر به شعاع یک واحد که مرکز آنها بر خط $2y=3x$ واقع است را بیابید.

۳- جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید:

الف) $y' x^3 \sin y + 2y = xy'$

ب) $(x-xy)\,dx + (y+x^2)\,dy = 0$

ج) $x^2y'' + 5xy' - 31y = 7$

د) $y'' - \frac{2}{x}y' + \left(1+\frac{2}{x^2}\right)y = xe^x$ ، $y_1 = x\sin x$

۴- جواب بصورت سری فروبنیوس در حوالی مبداء برای معادله دیفرانسیل زیر بیابید.

$$x^2y'' + x(3-x)y' + y = 0$$

۵- اگر $L[f(x)]=F(p)$ باشد ثابت کنید $L\left[\int_0^x f(t)\,dt\right] = \frac{1}{p}F(p)$

۶- مطلوبست محاسبه:

الف) $L^{-1}\left[\ln\frac{p^2+1}{p(p+1)}\right]$

ب) $L\left[\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\cdot e^{3t}\sin 2t\,dt\right]$ ، (راهنمائی: $L\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{p}}$)

ج) $L\left[\int_0^x x^2 e^{4t-3x}\cdot\sin\sqrt{3}\,t\,dt\right]$

بسمه تعالی

۱- اگر $f(t)$ تابعی پیوسته قطعه‌ای باشد و $L[f(x)]=F(p)$ ، ثابت کنید: $L\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]=\frac{1}{p}F(p)$

۲- معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt = 3\sin 2x - y(x)$

ب) $x y'' + (3x-1) y' = (4x+9) y$ و $y(0)=0$

۳- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بصورت یک سری توانی حول نقطه صفر بدست آورید:

$(x^2-1) y'' + 12y = 6x y'$

۴- معادله دیفرانسیل زیر را با تغییر متغیر مناسب به معادله فوق هندسی گاوس تبدیل نموده و سپس جواب عمومی آن را بیابید:

$(x^2+5x+6) y'' + (5+4x) y' = -y$

۵- مطلوبست محاسبه:

الف) $\Gamma(3/5) =$

ب) $L^{-1}\left[\tan^{-1}\frac{1}{p}\right]=$

ج) $\int_0^\infty \frac{\cos t-\cos 2t}{t}\,dt=$

د) $\int_{-1}^{1}\left(P_3(x)+P_7(x)\right)^2 dx =$

هـ) $L\left[\int_0^x x^2 e^{3t-2x}\sin\sqrt{2}\,t\,dt\right]=$

« موفق باشید »

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد

بسمه تعالی

واحد تهران جنوب

دانشکده فنی

سئوالات امتحانی پایان نیمسال دوم سال تحصیلی

نام درس: معادلات دیفرانسیل نام استاد: گروه ریاضی - کد درس: ۳۰۳۸ گروه آموزشی: ریاضی

تارخ امتحان : مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه جزوه باز ☐ بسته ☒ —

---

۱) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید (۱٫۵ نمره)

$$x^2y''+xy'+y=\operatorname{Sec}(\operatorname{Ln}(x))$$

۲) معادله دیفرانسیل $y'''-y''=xe^x-1$ را به یکی از روشهای ضرایب نامعین یا اپراتورهای معکوس حل کنید (۱٫۵ نمره)

۳) اگر $y_1=\frac{1}{\sin x}$ یک جواب خصوصی معادله $y''+2\operatorname{Cotg}x\, y'-y=0$ باشد جواب عمومی معادله $y''+2\operatorname{Cotg}x\, y'-y=2\operatorname{Cotg}x$ را بدست آورید (۱٫۵ نمره)

۴) مطلوبست محاسبه (هر مورد ۱٫۵ نمره)

۱) $\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{s}\right)\right\}$

۲) $\mathcal{L}\left\{e^{-x}\int_0^x \frac{e^t-\cos t}{t}\,dt\right\}$

۵) معادله دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید (۱٫۵ نمره)

$$y''+2y'-3y=\sin t$$
$$y(0)=y'(0)=0$$

۶) جواب معادله $y''+4y'+6xy=0$ را به روش سری توانی حول نقطه $x=0$ بدست آورید (۲٫۵ نمره)

۷) هر یک از معادلات زیر را حل کنید (هر مورد ۱٫۵ نمره)

۱) $(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$

۲) $y=y'\sin(y')+\cos(y')$ (راهنمایی: $y'=p$)

۸) معادله دیفرانسیل $x(1+3y'y^2)-2(x+y^3)=x^2\sqrt{x+y^3}$ را با تغییر متغیر $z=x+y^3$ حل کنید (۱٫۵ نمره)

کار عملی و امتحان میان ترم ۶ نمره

با آرزوی موفقیت

بسمه تعالی

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل زمان ۲ ساعت

۱-نوع نقاط غیر عادی معادله زیر را مشخص نموده و سپس در مورد جواب‌ها حول نقطه غیر عادی منظم بحث کنید . $x^2(2-x)y''+(1-x)y'+\frac{x^2}{x-2}y=0$

۲- یک جواب سری فرو بینوسی برای معادله $2xy''+(1+x)y'+y=0$ حول نقطه صفر بدست آورید .

۳-اگر $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x)$ که در آن $P_n(x)$ ها توابع چند جمله ای لژاندر هستند، a_n ها را یافته و سپس با استفاده از آن سه جمله اول سری مربوط به تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}0 & -1\le x<0\\ e^{-2x} & 0\le x\le 1\end{cases}$$

۴- الف) به کمک تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل $xy''+(3x-1)y'-(4x+9)y=0$ را با شرط اولیه $y(0)=0$ حل کنید.

۵-جواب عمومی معادله دیفرانسیل $4x^2y''+4xy'+(4x^2-9)y=0$ را حول نقطه صفر برحسب توابع $\cos x$ و $\sin x$ بیابید.

موفق باشید

گروه ریاضی و آمار

بسمه تعالی

آزمون پایان ترم معادلات دیفرانسیل　　　　وقت: 110 دقیقه

1) جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را حول نقطه $x_0 = 1$ بدست آورید.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

2) به روش سریها جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را حول نقطه $x_0 = 0$ محاسبه کنید.

$$xy'' + (1 - x)y' - y = 0$$

3) مطلوبست محاسبه :

الف) $L[x^2 e^{3x} \cos 4x]$

ب) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx$

4) جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

الف) $xy'' + 2y' + xy = 1 \qquad y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1$

ب) $y' + 5\int_0^x \cos 2(x - t)\, y(t)\, dt = 10 \qquad y(0) = 2$

5) درستی روابط زیر را ا بررسی کنید.

الف) $\tan^{-1} x = xF(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -x)$　　(F تابع فوق هندسی است)

ب) $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$　　(J_0 تابع بسل است)

موفق باشید – گروه ریاضی و آمار

جواب امتحان معادلات دیفرانسیل

1)

$x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0 \quad x_0=1 \Rightarrow t=x-1,\ x=t+1$

$(t+1)^2y''+(t+1)y'+[(t+1)^2-1]y=(t^2+2t+1)y''+(t+1)y'+(t^2+2t)y=0$

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n,\quad y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$

با قرار دادن y و مشتقاتش در معادله به رابطه بازگشتی زیر می‌رسیم

$a_2=\frac{-a_0}{2},\quad a_3=\frac{a_0-a_1}{6},$

$a_{n+2}=-\frac{(2n^2+3n+1)a_{n+1}+n^2a_n+2a_{n-1}+a_{n-2}}{n^2+3n+2}$

$n=2\Rightarrow a_4=\frac{-6a_0+a_1}{12}\qquad n=3\Rightarrow a_5=\frac{33a_0+2a_1}{3}$

$y=a_0+a_1t-\frac{a_0}{2}t^2+\frac{a_0-a_1}{6}t^3+\frac{-6a_0+a_1}{12}t^4+\frac{33a_0+2a_1}{3}t^5+\dots$

$=a_0(1+\frac16t^3-\frac{1}{12}t^4+11t^5+\dots)+a_1(t-\frac12t^2-\frac16t^3+\frac{1}{12}t^4+\dots)+\dots$

2)

$xy''+(1-x)y'-y=0\Rightarrow y''+\frac{1-x}{x}y'-\frac1xy=0$

$xp(x)=1-x\Rightarrow p_0=1\qquad x^2q(x)=-x\Rightarrow q_0=0$

$r(r-1)+r+0=0\Rightarrow r^2=0\Rightarrow r_1=r_2=0$

$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Rightarrow y_1'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad y_1''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\quad a_0\neq0$

معادله: $\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$

$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}=0$

$\sum_{n=1}^{\infty}[(n(n-1)+n)a_n-(n-1+1)a_{n-1}]x^{n-1}=0\Rightarrow\boxed{a_n=\frac{a_{n-1}}{n}}$

$\Rightarrow a_n=\frac{a_0}{n!}\Rightarrow y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{n!}x^n=a_0e^x\xrightarrow{a_0=1}\boxed{y_1=e^x}$

$y_2=y_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=e^x\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\qquad b_0\neq0$

$y_2'=e^x\ln x+\frac{e^x}{x}+\sum_{n=0}^{\infty}nb_nx^{n-1}$

$y_2''=e^x\ln x+2\frac{e^x}{x}-\frac{e^x}{x^2}+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)b_nx^{n-2}$

معادله: $xe^x\ln x+2e^x-\frac{e^x}{x}+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)b_nx^{n-1}+e^x\ln x+\frac{e^x}{x}+\sum_{n=0}^{\infty}nb_nx^{n-1}$

$-xe^x\ln x-e^x-\sum_{n=0}^{\infty}nb_nx^n-e^x\ln x-\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=0$

$e^x+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)b_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}nb_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)b_{n-1}x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}b_{n-1}x^{n-1}=0$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n^2-n+n)b_n+(-n+1-1)b_{n-1}+\frac{1}{(n-1)!}\right]x^{n-1}=0$

$\Rightarrow b_n=\frac{b_{n-1}}{n}-\frac{1}{n^2(n-1)!}\quad n=1,2,\dots,\ b_0=1\Rightarrow b_1=1-1=0$

$b_2=\frac{b_1}{2}-\frac14=\frac{-1}{4},\quad b_3=\frac{b_2}{3}-\frac{1}{9\times2}=\frac{-1}{12}-\frac{1}{18}=\frac{-5}{36},\ \dots$

$y=c_1e^x+c_2\left[e^x\ln x+1-\frac14x^2-\frac{5}{36}x^3-\dots\right]$

3)

الف) $L[e^{3x}\cos4x]=\frac{p-3}{(p-3)^2+16}\Rightarrow L[x^2e^{3x}\cos4x]=\left(\frac{p-3}{p^2-6p+25}\right)''$

$=\left(\frac{p^2-6p+25-(2p-6)(p-3)}{(p^2-6p+25)^2}\right)'=$

ب) $\int_0^{+\infty}e^{-px}\sin bx\,dx=L[\sin bx]=\frac{b}{b^2+p^2}$

$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-px}\sin bx}{x}dx=L\left[\frac{\sin bx}{x}\right]=\int_p^{+\infty}\frac{b}{t^2+b^2}dt=\left[\tan^{-1}\frac tb\right]_p^{+\infty}$

$=\frac\pi2-\tan^{-1}\frac pb\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}\sin bx}{x}dx=\boxed{\frac\pi2-\tan^{-1}\frac ab}$

4)

الف) $L[y]=Y\Rightarrow L[xy''+2y'+xy]=L[1]$

$\Rightarrow-(p^2Y-py(0)-\underbrace{y'(0)}_{=1})'+2(pY-y(0))-Y'=\frac1p\qquad Y'=\frac{dY}{dp}$

$\cancel{-2pY}-p^2Y'\cancel{+2pY}-Y'=\frac1p\Rightarrow Y'=\frac{-1}{p(p^2+1)}=\frac{-1}{p}+\frac{p}{p^2+1}$

$xy=-L^{-1}[Y']=-(-1+\cos x)\Rightarrow y=\frac{1-\cos x}{x}$

ب) $L[y]=Y\Rightarrow L\left[y'+5\int_0^x\cos2(x-t)y(t)dt\right]=L[10]$

$\Rightarrow pY-\underbrace{y(0)}_{2}+5L[\cos2x]Y=\frac{10}{p}\Rightarrow Y=\frac{\frac{10}{p}+2}{p+\frac{5p}{p^2+4}}=\frac{2p^3+10p^2+8p+40}{p^2(p^2+9)}$

$=\frac{AP+B}{p^2}+\frac{Cp+D}{p^2+9}=\frac{8/9}{p}+\frac{40/9}{p^2}+\frac{\frac{10}{9}p}{p^2+9}+\frac{\frac{50}{9}}{p^2+9}$

$\Rightarrow y=L^{-1}[Y]=\frac89+\frac{40}{9}x+\frac{10}{9}\cos3x+\frac{50}{27}\sin3x$

5)

$\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}$ ①

$xF(\frac12,1,\frac32,-x^2)=x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac12(\frac32)\cdots(n-\frac12)\,1(2)\cdots(n)}{n!\,\frac32(\frac52)\cdots(n+\frac12)}(-x^2)^n\right)$

$=x\left(1+\sum_{n=1}\frac{(-1)^nx^{2n}}{2\frac{2n+1}{2}}\right)=\sum_{n=0}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}$ ② $\xrightarrow{①}$ رابطه ثابت شد

ب) $J_{-\frac12}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac x2)^{2n-\frac12}}{n!(n-\frac12)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{\underbrace{2^{2n}n!(n-\frac12)!}_{(2n)!\sqrt\pi}}\cdot\frac{2^{\frac12}}{x^{\frac12}}$

$=\sqrt{\frac2x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!\sqrt\pi}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$

بسمه تعالی

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

---

1) دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = 3x - y - 2e^{3t} \end{cases}$$

2) با استفاده از سری توانی جواب عمومی معادله زیر را حول $x = 0$ بدست آورید.

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$$

3) با تغییر متغیر $t = -2x$ جواب عمومی معادله زیر را بر حسب توابع فوق هندسی گاوس حول $x = 0$ بدست آورید.

$$x(2x+1)y'' + 4xy' + 6y = 0$$

4) معادله انتگرالی زیر را حل کنید.

$$f(x) = 1 - \sinh x + \int_0^x (1+t) f(x-t)\,dt$$

5) معادله دیفرانسیل زیر را با تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$xy'' + (3x-1)y' - (4x+9)y = 0 \qquad y(0) = 0$$

وقت ۱۱۰ دقیقه

موفق باشید.

گروه ریاضی وآمار

1 ۴ نمره

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y & (1) \\ y' = 3x - y - 2e^{3t} & (2) \end{cases} \longrightarrow y'' = 3x' - y' - 6e^{3t} \xrightarrow{(1)} y'' = 12x - 6y - y' - 6e^{3t} \xrightarrow{(2)}$$

$$\boxed{y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}}$$

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 1$$

$$y_g = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$$

$$y_p = Ae^{3t} = e^{3t}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + e^{3t}} \ (2)$$

$$x = \frac{1}{3}\left(y' + y + 2e^{3t}\right) \xRightarrow{(2)} \boxed{x = \frac{2}{3} c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + 2e^{3t}}$$

---

2 ۶ نمره

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0 \qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 4n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 4a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + 6a_3 x - 4a_1 x - 2a_0 - 2a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} - 4n a_n + 4a_{n-2} - 2a_n\right] x^n = 0$$

$$2a_2 - 2a_0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = a_0} \qquad 6a_3 - 4a_1 - 2a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = a_1}$$

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{2(2n+1) a_n - 4a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 2}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_4 = \frac{2 \times 5 a_2 - 4a_0}{3 \times 4} \Rightarrow \boxed{a_4 = \frac{1}{2} a_0}$$

$$n = 4 \rightarrow a_6 = \frac{2 \times 9 a_4 - 4a_2}{5 \times 6} = \frac{9a_0 - 4a_0}{5 \times 6} \Rightarrow \boxed{a_6 = \frac{a_0}{6} = \frac{a_0}{3!}}$$

$$n = 6 \rightarrow a_8 = \frac{2 \times 13 \times a_6 - 4a_4}{7 \times 8} \Longrightarrow \boxed{a_8 = \frac{a_0}{24} = \frac{a_0}{4!}}$$

$$\vdots$$

$$n = 3 \Rightarrow a_5 = \frac{2 \times 7 \times a_3 - 4a_1}{4 \times 5} \qquad \boxed{a_5 = \frac{a_1}{2!}}$$

$$n = 5 \Rightarrow a_7 = \frac{2 \times 11 a_5 - 4a_3}{6 \times 7} \qquad \boxed{a_7 = \frac{a_1}{3!}}$$

$$\vdots$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_0 x^2 + a_1 x^3 + \frac{a_0}{2} x^4 + \frac{a_1}{2} x^5 + \frac{a_0}{3!} x^6 + \frac{a_1}{3!} x^7 + \cdots$$

$$y = a_0\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots\right) + a_1 x\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots\right)$$

$$\boxed{y = (a_0 + a_1 x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}}$$

③ ۲ نمره

$$x(2x+1)y'' + 4xy' + 6y = 0$$

$$t = -2x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = y'_t(-2)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 4y''_t$$

$$-\frac{t}{2}(-t+1)(4y''_t) - 2t(-2y'_t) + 6y = 0$$

$$t(1-t)\,y''_t - 2y'_t - 3y = 0$$

$$t(1-t)y'' + [c-(a+b+1)t]y' - aby = 0 \longrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a+b+1 = 2 \\ a\cdot b = 3 \end{cases}$$

a , b جواب حقیقی ندارد

$$y = c_1 F(a,b,c,x) + c_2 x^{1-c} F(a-c+1,\, b-c+1,\, 2-c,\, x)$$

---

④ ۳ نمره

$$f(x) = 1 - \sinh x + \int_0^x (1+t)\, f(x-t)\,dt$$

$$L[f(x)] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2-1} + L\left[\int_0^x (1+t)\, f(x-t)\,dt\right] = \frac{p^2-1-p}{p(p^2-1)} + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) L[f(x)]$$

$$\left[1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right] F(p) = \frac{p^2-1-p}{p(p^2-1)}$$

$$\frac{\cancel{p^2-p-1}}{p^{\cancel{2}}} F(p) = \frac{\cancel{p^2-p-1}}{\cancel{p}(p^2-1)} \Rightarrow F(p) = \frac{p}{p^2-1} \Rightarrow \boxed{f(x) = \cosh x}$$

---

⑤ ۵ نمره

$$xy'' + (3x-1)y' - (4x+9)y = 0 \qquad y(0) = 0$$

$$L[y] = Y(p)$$

$$L[xy] = -Y'(p)$$

$$L[y'] = pY(p) - y(0) = pY(p)$$

$$L[xy'] = -\left(L[y']\right)' = -\left(pY(p) - y(0)\right)' = -\left(Y(p) + pY'(p)\right)$$

$$L[xy''] = -\left(L[y'']\right)' = -\left(p^2Y(p) - py(0) - y'(0)\right)' = -\left(p^2Y(p)\right)' = -\left(2pY(p) + p^2Y'(p)\right)$$

$$-\left(2pY(p) + p^2Y'(p)\right) - 3\left(Y(p) + pY'(p)\right) - pY(p) + 4Y'(p) - 9Y(p) = 0$$

$$(p^2 - 3p - 4)Y'(p) + (3p+12)Y(p) = 0$$

$$\cancel{(p+4)}(p-1)Y'(p) = -3\cancel{(p+4)}Y(p) \Rightarrow \frac{Y'(p)}{Y(p)} = \frac{-3}{p-1}$$

$$\ln(Y(p)) = -3\ln(p-1) + \ln K$$

$$\ln Y(p) = \ln\frac{K}{(p-1)^3} \Rightarrow Y(p) = \frac{K}{(p-1)^3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{K}{2}x^2e^x}$$