

بسمه تعالی  
 امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل - دانشکده فنی و مهندسی

۱) جواب عمومی معادلهٔ بسل زیر را بر حسب توابع مثلثاتی بدست آورید.

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)y = 0$$

۲) معادلهٔ انتگرالی زیر را با شرط  $F(0) = 0$  حل کنید.

$$F'(x) = \sin x + \int_0^x F(x-u) \cos u \, du$$

۳) جوابی به صورت سری فونینویس برای معادلهٔ زیر در مجاورت مبدأ بیابید. ( $x > 0$ )

$$x^2 y'' + 3xy' + (1 - 2x)y = 0$$

۴) مطلوبیت محاسبهٔ:  $\int_{-1}^1 (P_r(x) + P_q(x))^2 dx$  (الف)

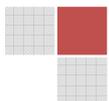
ب)  $L\left[\int_0^x x \cdot e^{at-fx} \cdot \sin \sqrt{t} \, dt\right]$

ج)  $L\left[\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2} dt\right]$  و  $x > 0$

د)  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  بر حسب تابع گاما،

ه)  $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{2x} dx$

موفق باشید. خرازی



» بسمه تعالی «

مدت: ۲ ساعت امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

۱- به کمک تبدیل لاپلاس جواب دستگاه زیر را با شرایط اولیه  $x(0) = x'(0) = y(0) = 0$  بدست آورید؟

$$\begin{cases} x' - y' = 2x - 2y + \sin t \\ x'' + 2y' + x = 0 \end{cases} \quad (x = x(t), y = y(t))$$

۲- مطلوبت محاسبه تبدیلات زیر

الف)  $L [ t^r e^{-t} \int_0^t e^{2u} \sin au \, du ]$       ب)  $L^{-1} [ \cot^{-1}(p+4) ]$

۳- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر حول  $x=0$  را با کمک سریها بیابید. سپس با فرض  $\lambda=2$  جوابی از معادله به صورت چند جمله‌ای متناهی بنویسید؟

$$y'' - 2xy' + \lambda xy = 0 \quad (\text{معادله هرمیت})$$

۴- با استفاده از سری فوق هندسی جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را حول مبدأ بیابید؟

$$(x-x^2)y'' + 4(1-x)y' - 2y = 0$$

۵- مطلوبت محاسبه انتگرال زیر؟  $(P_n(x))$  چند جمله‌ای تواندار مرتبه  $n$  است

$$\int_{-1}^1 [(3x^2-1) + 2P_n(x)] P_n(x) dx$$

۶- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را حول نقطه غیر عادی منظم آن بیابید؟

$$2x^2 y'' + xy' - (1+x)y = 0$$

موفق باشید - گروه ریاضی

۱- جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $5y'' - 5xy' + 5y = 0$  را بیابید.

۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس بیابید:

$$xy'' + (2x+3)y' + (x+3)y = 3e^{-x}, \quad y(0) = 0$$

۳- مطلوب است می بسید  $\int_0^x \sqrt{\frac{1}{x-t}} e^{3t} \sin 2t dt$

۴- جواب عمومی معادله فوق هندسی  $4(x^2-1)y'' + 4xy' - y = 0$  را حول مبدأ بیابید.

۵- معادله دیفرانسیل بسیل با  $p = \frac{3}{2}$  را تشکیل دهید. سپس جواب عمومی آنرا

بر حسب توابع مقدماتی مثلثی بسینوس و کسینوس بدست آورید.

۶- سه جمله اول بسط لوران در تابع  $y = \begin{cases} 2-x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & -1 < x < 0 \end{cases}$  را بدست آورید.

۷- جوابی به صورت سری فروبونیوس برای معادله دیفرانسیل زیر در مجاورت مبدأ بیابید:

$$x^2 y'' + x(3+x)y' + (1+3x)y = 0$$

موفق باشید - خرازی

زنگ : ۱۱۵ دقیقه

بسم تعالی

زنگ ۲ ساعت

گزینه‌های صحیح در مسائل زیر

۱- اگر  $r$  تابعی بر روی  $t$  و  $a$  و  $w$  مقادیر ثابت باشند جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را در حالات مختلف بدست آورده و در صورت لزوم محبت کنید.

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + ra \frac{dr}{dt} + w^2 r = 0$$

۲- میوه‌ها ستفاده شده در طرح کار با شعاع یک واحد که مرکز آن در نقطه  $xy = 3x$  واقع است را بیابید.

۳- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

الف)  $y' x^3 \sin y + 2y = xy'$

ب)  $(x-xy) dx + (y+x^2) dy = 0$

ج)  $x^2 y'' + 2x y' - 21y = 7$

د)  $y'' - \frac{2}{x} y' + (1 + \frac{2}{x^2}) y = x e^x$  ,  $y_1 = x \sin x$

۴- جواب بصورت سری فونریس در محاوره پیدا و برای معادله دیفرانسیل زیر بیابید.

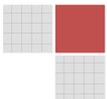
$$x^2 y'' + x(3-x)y' + y = 0$$

۵- اگر  $L[f(x)] = F(p)$  باشد محبت کنید  $L[\int_0^x f(t) dt] = \frac{1}{p} F(p)$

۶- مطلوب محاسبه: الف)  $L^{-1} \left[ \ln \frac{p^2+1}{p(p+1)} \right]$

ب)  $L \left[ \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \cdot e^{\nu t} \sin \nu t dt \right]$  (راهنمایی:  $L \left[ \frac{1}{\sqrt{x}} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{p}}$ )

ج)  $L \left[ \int_0^x x^2 e^{\nu t - 3x} \cdot \sin \sqrt{x} t dt \right]$



بسمه تعالی

۱- اگر  $f(t)$  تابعی پیوسته قطعه‌ای باشد و  $L[f(x)] = F(p)$  ثابت کنند:  $L\left[\int_0^x f(t) dt\right] = \frac{1}{p} F(p)$

۲- معادلات زیر را حل کنید:

الف)  $\int_0^x (x-t) y(t) dt = 3 \sin 2x - y(x)$

ب)  $x y'' + (3x-1) y' = (4x+9) y$  و  $y(0) = 0$

۳- جواب عمومی معادله ریفرانسیل زیر را بصورت کسری توانی حول نقطه صفر بدست آورید:

$$(x^2-1) y'' + 12y = 4x y'$$

۴- معادله ریفرانسیل زیر را با تغییر متغیر مناسب به معادله فوق هندسه کلاسیک تبدیل نموده و سپس جواب عمومی آن را

بیابید:

$$(x^2+5x+4) y'' + (5+3x) y' = -y$$

۵- مطلوبت محاسبه:

الف)  $T^2(1/5) =$

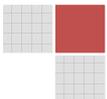
ب)  $L^{-1}\left[\tan^{-1}\frac{1}{p}\right] =$

ج)  $\int_0^{\infty} \frac{\cos t - \cos 2t}{t} dt =$

د)  $\int_{-1}^1 (P_3(x) + P_5(x))^2 dx =$

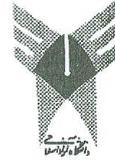
ه)  $L\left[\int_0^x x^2 e^{3t-2x} \sin \sqrt{t} dt\right] =$

« حروفی با سهر »



# استفاده از حساب مجازعی

بسمه تعالی



واحد تهران جنوب

دانشکده فنی

**سئوالات امتحانی پایان نیمسال (۲)** سال تحصیلی

نام درس: معادلات ریاضی نام استاد: سرور رضی کد درس: ۳۰۳۸ گروه آموزشی: ریاضی  
 تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۰۲/۲۰ مدت امتحان: ۲۰ دقیقه جزوه باز  بسته

- ۱) معادله ریاضی زیر را حل کنید (۱،۵ نمره)  

$$x^2 y'' + xy' + y = \sec(\ln(x))$$
- ۲) معادله ریاضی  $y'' - y' = xe^x - 1$  را با یکی از روش‌های زیر حل کنید. با استفاده از روش‌های معمول حل کنید (۱،۵ نمره)
- ۳) اگر  $y_1 = \frac{1}{\sin x}$  یک جواب خصوصی معادله  $y'' + 2\cot x y' - y = 0$  باشد جواب عمومی معادله  $y'' + 2\cot x y' - y = 2\cot x$  را بدست آورید (۱،۵ نمره)
- ۴) مطلوب است محاسبه (هر مورد ۱،۵ نمره)  
 ۱)  $\int \frac{1}{x} e^{-\pi x} \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) dx$   
 ۲)  $\int \frac{e^x \int \frac{e^t - \cot t}{t} dt}{x} dx$
- ۵) معادله ریاضی زیر را با جداسازی متغیر حل کنید (۱،۵ نمره)  

$$y'' + 2y' - 4y = \sin t$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$
- ۶) جواب معادله  $y'' + 4y' + 4xy = 0$  را با روش سری توانی حول نقطه  $x=0$  بدست آورید (۲،۵ نمره)
- ۷) هر یک از معادلات زیر را حل کنید (هر مورد ۱،۵ نمره)  
 ۱)  $(2xy^4 e^y + 2xy^3 + y) dx + (x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 4x) dy = 0$   
 ۲)  $y = y' \sin(y') + \cos(y')$  ( $dy' = p$ )
- ۸) معادله ریاضی  $x(1+3y^2 y') - 2(x+y)^2 = 2\sqrt{x+y^3}$  را با تغییر متغیر  $z = x+y^3$  حل کنید (۱،۵ نمره)

سازگار و مستقیم

۱۱/۰۵/۹۳

بسمه تعالی

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

زمان ۲ ساعت

۱- نوع نقاط غیر عادی معادله زیر را مشخص نموده و سپس در مورد جواب‌ها حول نقطه

$$x^2(2-x)y'' + (1-x)y' + \frac{x^2}{x-2}y = 0 \quad \text{غیر عادی منظم بحث کنید.}$$

۲- یک جواب سری فرو بینوسی برای معادله  $2xy'' + (1+x)y' + y = 0$  حول نقطه صفر بدست آورید.

۳- اگر  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$  که در آن  $P_n(x)$  ها توابع چند جمله ای لژاندر هستند،  $a_n$  ها را یافته و سپس با استفاده از آن سه جمله اول سری مربوط به تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ e^{-2x} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

۴- الف) به کمک تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل

$$xy'' + (3x-1)y' - (4x+9)y = 0 \quad \text{را با شرط اولیه } y(0) = 0 \quad \text{حل کنید.}$$

۵- جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $4x^2y'' + 4xy' + (4x^2 - 9)y = 0$  را حول نقطه صفر بر حسب توابع  $\sin x$  و  $\cos x$  بیابید.

موفق باشید

گروه ریاضی و آمار

بسمه تعالی

آزمون پایان ترم معادلات دیفرانسیل وقت: 110 دقیقه

1) جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را حول نقطه  $x_0 = 1$  بدست آورید.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

2) به روش سریها جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را حول نقطه  $x_0 = 0$  محاسبه کنید.

$$xy'' + (1-x)y' - y = 0$$

3) مطلوبست محاسبه:

الف)  $L[x^2 e^{3x} \cos 4x]$

ب)  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx$

4) جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

الف)  $xy'' + 2y' + xy = 1$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y'(0) = 1$

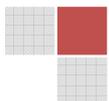
ب)  $y' + 5 \int_0^x \cos 2(x-t) y(t) dt = 10$  ,  $y(0) = 2$

5) درستی روابط زیر را بررسی کنید.

الف)  $\tan^{-1} x = xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -x\right)$  ( $F$  تابع فوق هندسی است)

ب)  $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$  ( $J_0$  تابع بسل است)

موفق باشید - گروه ریاضی و آمار



الف)  $L[e^{px} \cos bx] = \frac{p-r}{(p-r)^2 + b^2} \Rightarrow L[x^r e^{px} \cos bx] = \left( \frac{p-r}{p^2 + p^2 + b^2} \right)'$   
 $= \frac{(p^2 - 4p + 4b - (p-r)(p-r))'}{(p^2 - 4p + 4b)^2}$

ب)  $\int_0^{+\infty} e^{-px} \sin bx dx = L[\sin bx] = \frac{b}{p^2 + b^2}$   
 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-px} \sin bx}{x} dx = L\left[\frac{\sin bx}{x}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{b}{p^2 + p^2} dt = \left[ \tan^{-1} \frac{p}{b} \right]_0^{+\infty}$   
 $= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{p}{b} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{a}{b}$

ii)  $L[y] = y \Rightarrow L[xy'' + ry' + xy] = L[1]$   
 $\Rightarrow (p^2 y - p^2 y(0) - y'(0)) + r(py - y(0)) - y' = \frac{1}{p} \quad y' = \frac{dy}{dp}$   
 $-xpy' - p^2 y' + xpy - y' = \frac{1}{p} \Rightarrow y' = \frac{-1}{p(p^2+1)} = \frac{-1}{p} + \frac{p}{p^2+1}$   
 $xy = -L^{-1}[y'] = -(-1 + \cos x) \Rightarrow y = \frac{1 - \cos x}{x}$

1)  $L[y] = y \Rightarrow L\left[y' + \int_0^x \cos x(t+y(t)) dt\right] = L[1]$   
 $\Rightarrow py - y(0) + \Delta L[\cos x] y = \frac{1}{p} \Rightarrow y = \frac{1/p + r}{p + \Delta p} = \frac{r p^2 + p + p + r}{p^2(p^2 + r)}$   
 $= \frac{Ap+B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+r} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p^2+r} + \frac{D}{p^2+r}$   
 $\Rightarrow y = L^{-1}[y] = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} \cos rx + \frac{D}{x} \sin rx$

$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$   
 $x F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x\right) = x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/2)(3/2) \dots (n-1/2)}{n! (3/2)(5/2) \dots (n+1/2)} (-x)^n\right)$   
 $= x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{2^n n!}$

1)  $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}}}{n!(n-\frac{1}{2})!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-\frac{1}{2}}}{2^n n!(n-\frac{1}{2})!} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$   
 $= \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!) \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x$

عبارت امکان دارد تغییر نیابد

$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0 \quad x=1 \Rightarrow t=x-1, x=t+1$   
 $(t+1)y'' + (t+1)y' + [(t+1)^2 - 1]y = (t^2 + 2t + 1)y'' + (t+1)y' + (t^2 + 2t)y = 0$   
 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}, y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$   
 با فرض دادن یادم استفتی در معادله با رابطه با روش زوری

$a_p = \frac{-a_1}{p}, a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$   
 $a_{n+r} = -\frac{(n+n+1)a_{n+1} + n^2 a_n + r a_{n-1} + a_{n-2}}{n^2 + 2n + r}$   
 $n=r \Rightarrow a_r = \frac{-r a_1 + a_1}{r^2} \quad n=r \Rightarrow a_0 = \frac{r^2 a_1 + r a_1}{r^2}$   
 $y = a_0 + a_1 t - \frac{a_1}{r} t^r + \frac{a_1 - a_1}{r} t^r + \frac{-r a_1 + a_1}{r^2} t^r + \frac{r^2 a_1 + r a_1}{r^2} t^r + \dots$   
 $= a_1 \left(1 + \frac{1}{r} t^r - \frac{1}{r^2} t^{2r} + \dots\right) + a_1 \left(t - \frac{1}{r} t^r + \frac{1}{r^2} t^{2r} - \dots\right)$

$xy'' + (1-x)y' - y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{1-x}{x} y' - \frac{1}{x} y = 0$   
 $xp(x) = 1-x \Rightarrow p=1 \quad x^2 q(x) = -x \Rightarrow q = -\frac{1}{x}$   
 $r(r-1) + r + 0 = 0 \Rightarrow r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$   
 $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$   
 در اینجا:  $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} [(n(n-1)+n) a_n - (n-1) a_{n-1}] x^{n-1} = 0 \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n!}$   
 $\Rightarrow a_n = \frac{a_1}{n!} \Rightarrow y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1}{n!} x^n = a_1 e^x \Rightarrow y_1 = e^x$

$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = e^x \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad b_n \neq 0$   
 $y_2' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1}$   
 $y_2'' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}$

در اینجا  $e^x \ln x + \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} + e^x \ln x + \frac{e^x}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} - e^x \ln x - \frac{e^x}{x} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$   
 $-x e^x \ln x - e^x - \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^n - e^x \ln x - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$   
 $e^x + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) b_{n-1} x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} = 0$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^x}{(n-1)!} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [(n^2 - n + n) b_n + (-n + n - 1) b_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}] x^{n-1} = 0$

$\Rightarrow b_n = \frac{b_{n-1}}{n} + \frac{1}{n!(n-1)!} \quad n=1, 2, \dots, b_0 = 1 \Rightarrow b_1 = 1 - 1 = 0$   
 $b_1 = \frac{b_0}{1} - \frac{1}{1} = 0, b_2 = \frac{b_1}{2} - \frac{1}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}, b_3 = \frac{b_2}{3} - \frac{1}{3 \times 2} = -\frac{1}{6}, \dots$   
 $y = c_1 e^x + c_2 \left[ e^x \ln x + 1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 - \dots \right]$

بسمه تعالی

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

(1) دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = 3x - y - 2e^{3t} \end{cases}$$

(2) با استفاده از سری توانی جواب عمومی معادله زیر را حول  $x = 0$  بدست آورید.

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$$

(3) با تغییر متغیر  $t = -2x$  جواب عمومی معادله زیر را بر حسب توابع فوق هندسی گاوس حول  $x = 0$  بدست آورید.

$$x(2x + 1)y'' + 4xy' + 6y = 0$$

(4) معادله انتگرالی زیر را حل کنید.

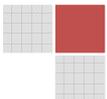
$$f(x) = 1 - \sinh x + \int_0^x (1+t)f(x-t)dt$$

(5) معادله دیفرانسیل زیر را با تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$xy'' + (3x-1)y' - (4x+9)y = 0 \quad y(0) = 0$$

وقت ۱۱۰ دقیقه

موفق باشید.  
گروه ریاضی و آمار



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & x' = rx - ry \\ \textcircled{2} \quad & y' = rx - y - re^{rt} \rightarrow y'' = rx' - y' - re^{rt} \xrightarrow{\textcircled{1}} y'' = rx - ry - y' - re^{rt} \xrightarrow{\textcircled{2}} \\ & \boxed{y'' - ry' + ry = re^{rt}} \end{aligned}$$

$$m^2 - rm + r = 0$$

$$\begin{aligned} m_1 &= r \\ m_2 &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} y_g &= c_1 e^{rt} + c_2 e^t \\ y_p &= A e^{rt} = e^{rt} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{rt} + c_2 e^t + e^{rt} \quad \textcircled{3}$$

$$x = \frac{1}{r} (y' + y + re^{rt}) \xrightarrow{\textcircled{3}} x = \frac{1}{r} c_1 e^{rt} + c_2 e^t + e^{rt}$$

①  
y/t

$$y'' - rxy' + (rx^r - r)y = 0 \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \textcircled{4}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} r n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} r a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} r a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+r) a_{n+r} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} r n a_n x^n + \sum_{n=r}^{\infty} r a_{n-r} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} r a_n x^n = 0$$

$$r a_r + r a_2 x - r a_1 x - r a_0 - r a_1 x + \sum_{n=r}^{\infty} [(n+1)(n+r) a_{n+r} - r n a_n + r a_{n-r} - r a_n] x^n = 0$$

$$r a_r - r a_0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_r = a_0} \quad r a_2 - r a_1 - r a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = a_1}$$

$$\boxed{a_{n+r} = \frac{r(n+1) a_n - r a_{n-r}}{(n+1)(n+r)}, \quad n \geq r}$$

$$n=r \Rightarrow a_r = \frac{r \cdot 1 \cdot a_0 - r a_0}{r \cdot 2r} \Rightarrow \boxed{a_r = \frac{1}{r} a_0}$$

$$n=r \Rightarrow a_2 = \frac{r \cdot 2 \cdot a_1 - r a_0}{2 \cdot 2r} = \frac{2a_1 - a_0}{2 \cdot 2r} \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{a_1}{r} = \frac{a_0}{r!}}$$

$$n=r+1 \Rightarrow a_3 = \frac{r \cdot 3 \cdot a_2 - r a_1}{(r+1) \cdot 3r} \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{a_1}{r^2} = \frac{a_0}{r!}}$$

⋮

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \frac{a_0}{r} x^r + \frac{a_0}{r!} x^2 + \frac{a_0}{r!} x^3 + \dots$$

$$y = a_0 \left( 1 + x^r + \frac{x^2}{r!} + \frac{x^3}{r!} + \dots \right) + a_1 x \left( 1 + x^r + \frac{x^2}{r!} + \frac{x^3}{r!} + \dots \right)$$

$$\boxed{y = (a_0 + a_1 x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

$$n=r \Rightarrow a_0 = \frac{r \cdot 1 \cdot a_0 - r a_0}{r \cdot 2r}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{a_1}{r!}}$$

$$n=r \Rightarrow a_1 = \frac{r \cdot 1 \cdot a_0 - r a_0}{r \cdot 2r}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{a_1}{r!}}$$

⋮

$$x(2x+1)y'' + 7xy' + 7y = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} t = -rx \\ y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t (-r) \\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = r^2 y''_t \end{array} \right. \quad \textcircled{3}$$

$$-\frac{t}{r}(-t+1)(+y''_t) - r t(-y'_t) + 7y = 0$$

$$t(1-t)y''_t - r y'_t - r^2 y = 0$$

$$t(1-t)y'' + [c - (a+b+1)t]y' - aby = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} c=0 \\ a+b+1=r \\ a \cdot b = r^2 \end{array} \right. \quad \text{ب, ا, ج - ضمني نبار}$$

$$y = c_1 F(a, b, c, x) + c_2 x^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

$$f(x) = 1 - \sinh x + \int_0^x (1+t) f(x-t) dt \quad \textcircled{f}$$

$$L[f(x)] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2-1} + L\left[\int_0^x (1+t) f(x-t) dt\right] = \frac{p^2-1-p}{p(p^2-1)} + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) L[f(x)]$$

$$\left[1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right] F(p) = \frac{p^2-1-p}{p(p^2-1)}$$

$$\frac{p^2-p-1}{p^2} F(p) = \frac{p^2-p-1}{p^2(p^2-1)} \Rightarrow F(p) = \frac{p}{p^2-1} \Rightarrow \boxed{f(x) = \cosh x}$$

$$xy'' + (2x-1)y' - (2x+9)y = 0 \quad y(0) = 0 \quad \textcircled{a}$$

$$L[y] = Y(p) \quad L[xy'] = -(L[y'])' = -(pY(p) - y(0))' = -(Y(p) + pY(p))$$

$$L[xy''] = -(L[y''])' = -(p^2 Y(p) - p y'(0) - y'(0))' = -(p^2 Y(p))$$

$$L[y'] = pY(p) - y(0) = pY(p) \quad = -(2pY(p) + p^2 Y'(p))$$

$$-(2pY(p) + p^2 Y'(p)) \Rightarrow p^2 (Y(p) + pY'(p)) - pY(p) + pY'(p) - 9Y(p) = 0$$

$$(p^2 - 2p - 9) Y'(p) + (2p + 1)p Y(p) = 0$$

$$(2p+9)(p+1) Y'(p) = -p^2 (2p+9) Y(p) \Rightarrow \frac{Y'(p)}{Y(p)} = \frac{-p^2}{p-1}$$

$$\ln(Y(p)) = -p \ln(p-1) + \ln K$$

$$\ln Y(p) = \ln \frac{K}{(p-1)^p} \Rightarrow Y(p) = \frac{K}{(p-1)^p} \Rightarrow \boxed{y = \frac{K}{r} x^r e^x}$$