

بسمه تعالی

۲۴

۱۵

۱- الف) هم‌ریشه‌های چهارم عدد ۲ را محاسبه کنید. ب) مطلوبیت محاسبه $(1 + \sqrt{3}i)^4$

۱

۲- نمودار منحنی نمایش معادله $r^2 = \sin^3 \theta$ را رسم کنید.

۱۵

۳- مطلوبیت محاسبه: ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{i/n}$ الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+1} \right)^{x+3}$

۱۵

۴- مطلوبیت محاسبه $\frac{dy}{dx}$ هرگاه: الف) $y^x = x^y$

ب) $y = \int_{\sqrt{x}}^{\pi/4} \frac{\sin^{-1} t}{1+t^2} dt$ ج) $y = \sinh(\tan^{-1} e^{3x})$

۵

۵- ثابت کنید: اگر f در هر نقطه از $[a, b]$ پیوسته باشد و F پادمشتق f در $[a, b]$ باشد

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{آنگاه:}$$

۶- اگر $0 < a < b < \frac{\pi}{4}$ باشد، به کمک قضیه مقدار میانگین ثابت کنید:

۱

$$(a-b) \tan b < \ln \left(\frac{\cos b}{\cos a} \right) < (a-b) \tan a$$

۵

۷- ثابت کنید: الف) $\int_0^t f(x) \cdot g(t-x) dx = \int_0^t g(x) \cdot f(t-x) dx$

۹

ب) $\cot \tanh^{-1} x = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{1}{x} \right)$ ، $|x| > 1$

۱۵

۸- مطلوبیت محاسبه:

$$\text{الف) } \int \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} dx \quad \text{ب) } \int_0^{\pi/4} \sin x \cdot 2^{\cos x} dx$$

تذکر: پاسخ تمام سوالات به صورت تشریحی و کامل بیان شود.

موفق باشید گروه ریاضی و آمار

زمان: ۱۱۰ دقیقه

۱. حدود زیر را بیابید.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\epsilon}{n^2 - i^2}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{1+3x} \right)^{5x-2}$$

۲. هرگاه تابع $f \neq 0$ پیوسته و داشته باشیم $f''(x) = \int_0^x f(t) \frac{\sin t}{1+\cos t} dt$ مطلوبست محاسبه $f(x)$.

۳. در یک طرف رودخانه مستقیمی دو شهر قرار دارند. می‌خواهیم در ساحل رودخانه تصفیه‌خانه‌ای مشترک برای آب مصرفی دو شهر بسازیم. فاصله این دو شهر تا رودخانه به ترتیب a و b و فاصله آنها از یکدیگر c است. حداقل طول لوله مورد نیاز را محاسبه کنید.

۴. آب با سرعت ۲ مترمکعب بر ثانیه به یک مخزن مخروطی شکل با راس در پایین می‌ریزد. وقتی عمق آب ۵ متر است، سطح آب با چه سرعتی بالا می‌آید، در حالیکه شعاع قاعده مخزن ۳ و ارتفاع آن ۱۰ متر است.

۵. طول قوس منحنی $y = \ln \sec x$ را از $x = 0$ تا $x = \frac{\pi}{4}$ بدست آورید.

۶. ورقه نازکی واقع در ربع اول به خم $y = x^2$ و خط $y = x$ محدود می‌باشد و چگالی این ورقه برابر است با $\delta(x) = 12x$ ، مطلوب است مرکز جرم این ورقه.

۷. تقریب درجه دوم $\sqrt{17}$ را بدست آورید. حداکثر خطا را برآورد کنید.

موفق باشید

گروه ریاضی و آمار

دسته تقالی

امتحان میانترم ریاضی عمومی I

زمان ۱۰۰ دقیقه

۱- حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{5x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin(63x)}{63x}$

ج) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + i}}$

۲- طول قوس $x = e^t \sin t$ و $y = e^t \cos t$ را برای $0 \leq t \leq \pi$ بیابید.

۳- نامی سه قوس $y = x^2$ و $y = 2x$ در ربع اول را حول محور x ها دوران دهید. حجم حاصل را بیابید.

۴- اگر $f(x) = \int_0^x f(t) \frac{\sin t}{2 + \cos t} dt$ و f تابعی غیر صفر و پویا باشد، f را بیابید.

۵- زنگ دهنده $\forall x > 0 : 2 \tan^{-1} x = \left(\sin^{-1} \frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{\pi}{2}$

۶- فرض کنید L طول $\frac{1}{2}$ دو قسمت یکی مربع و یکی دایره بیضی باشد. طول L را طوری تقسیم کنید که مساحت کل بیشترین شود. شعاع دایره و طول وتر مربع چقدر باشد؟

نوعی باشد

۱- جدهای داده شده را بدست آورید. (در صورت وجود)

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \sqrt{t} dt}{\sin x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{1/x}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin \frac{1}{x}}$

۲- ناحیه محصور بین خطوط $y=x$ و $x=\pi/4$ و منحنی $y=\sin x$ را حول محور x ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را بدست آورید.

۳- قضیه رول را بدون داشتن شرط $f(a)=f(b)=0$ و با شرط $f(a)=f(b)=k$ اثبات کنید.

۴- اگر f روی فاصله (∞, ∞) صعودی باشد، نشان دهید:

$$f(a) + f(a+1) + \dots + f(n-1) < \int_a^n f(x) dx < f(a) + f(a+1) + \dots + f(n)$$

و با مقدار دادن $f(x) = \ln(x)$ در این فرمول اثبات کنید که

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$$

و با استفاده از آن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e$ را محاسبه کنید.

۵- اگر f از روی $n > 1$ ؛ " $\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq (x-y)^n$ " نشان دهید نتایج f ثابت است (با استفاده از مشتق).

گروه ریاضی و آمار

بسم تعالی

امتحان میانترم ریاضی عمومی (۱) - دانشکده فنی و مهندسی

وقت ۲ ساعت

۱- حدهای زیر را در صورت وجود بیابید:

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} \left[\frac{1}{x-2} \right]$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x-1} \sqrt{1-x})$

ج) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cosh^{-1} x - \ln x)$

د) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-2} \right)^{2x+3}$

۲- مطلوب است محاسبه $\frac{dy}{dx}$ در حرکت از موارد زیر:

الف) $y = (\sqrt{\pi})^{\sqrt{x}}$

ب) $y = \sin^{-1} e^{3x} + \sec \sqrt{x}$

ج) $y = \tanh^{-1}(2x^2) + \sinh^{-1}(\cos x)$

د) $\sqrt[5]{y^2} = (\sqrt{ex})^{\ln x}$

۳- الف) دوره تناوب تابع $y = (-1)^{[x]}$ را بیابید.

ب) تابع $y = \sin(\cos^{-1} x)$ زوج است یا فرد؟ چرا؟

۴- اگر f در صفر پیوسته باشد و برای هر دو عدد حقیقی a و b داشته باشیم $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ نشان دهید f در \mathbb{R} پیوسته است.

۵- اگر $f(x) = \sin(2x - 3f(x))$ باشد $f'(0)$ را بیابید.

۶- ثابت کنید در بین تمام مستطیلهای مفروض با محیط ثابت h ، مساحت مربع از همه بزرگتر است.

۷- فرض کنید f در $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق پذیر از مرتبه دوم باشد. فرض کنید h یک خط باشد

انتهای $A = (a, f(a))$ و $B = (b, f(b))$ نمودار f را در نقطه ای مانند P متمایل از A و B

قطع کند. نشان دهید عددی مانند c در (a, b) هست که $f''(c) = 0$.

« موفق باشید » خرازی

« آنگاه بایستد که با یاد خدا دلها آرام میگیرد. »

۱- اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$ نشانه $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ است.

درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

۲) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ۳) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = \frac{1}{e}$

۴) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ ۵) $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$

انتگرالهای زیر را حساب کنید:

۶) $I = \int \frac{\ln x dx}{(1 + \ln x)^2}$

۷) $J = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$ (می‌توانید تساوی را ثابت کرده و از آن بهره‌مند شوید)

۸) برای چه مقدار α انتگرال $\int_1^{\infty} \left(\frac{\alpha x}{1+x^2} - \frac{1}{2x+1} \right) dx$ همگرا است؟

۹) در همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - 2)^{2n}$ بحث کنید.

۱۰) نشان دهید که مساحت ناحیه‌های محصور به ضم $r = 2a \cos 3\theta$ و کمانی از دایره $r = a$ که بیرون دایره واقعند برابر $a^2 \left(\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$ است.

۱۱) یک آبشار از سه تخته با چنانی مساوی ساخته می‌شود تخته‌های چنانی را با چه شیبی قرار دهیم تا سطح مقطع عرض آن ماکزیمم شود.

۱۲) یک قایق چوبی به وسیله طنابی که با سرعت ۳ متر بر دقیقه به دور یک استوانه می‌چکد به ساحل کشیده می‌شود. سرعت قایق در لحظه‌ای که ۲۵ متر تا ساحل فاصله دارد بدست

آورد در صورتیکه بدایم استوانه در ساحل و در ارتفاع ۴ متری از سطح آب قرار دارد.

«موفق باشید» خورازی

جسم تعالی

میان ترم ریاضی (۱) دانشجو: پاسخنامه (ش. د.)

صفحه اول
۱- اگر $y = t + 3 \sin t$ و $x = 3 \cos t$ باشد $\frac{d^2y}{dx^2}$ در $t = \frac{\pi}{4}$ را بیابید. ۷/۵

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 + 3 \cos t}{-3 \sin t} = -\frac{1}{3} \csc t - \frac{1}{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{-\frac{1}{3} \cot t \csc t}{-3 \sin t} \Rightarrow \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{0}{-3 \sin \frac{\pi}{4}} = 0$$

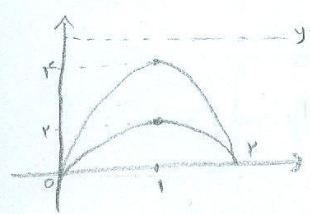
۲- حدهای زیر را بیابید: ۵
الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+5} \right)^{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{x+5} \right)^{3(x+5)-14} = e^{(-6)(3)} = e^{-18}$

ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{i^2+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i/n}{(i/n)^2+1} = \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$ ۷/۵

ج) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{du}{u + \sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$
 $= \frac{1}{x} (\ln x - \ln 1) = \ln \sqrt{x}$

۳- میانگین تابع $y = 3x^2 + 2x - 1$ از $x=0$ تا $x=2$ را بیابید. ۵
 $y_{\text{avg}} = \frac{1}{2-0} \int_0^2 (3x^2 + 2x - 1) dx = \left[\frac{3}{2} x^3 + x^2 - x \right]_0^2 = \frac{3}{2}(8) + 4 - 2 = \frac{10}{2} = \frac{10}{2}$

۴- سطح محصور بین فرمهای $y_1 + 2(x-1)^2 = 2$ و $y_2 + 4(x-1)^2 = 4$ واقع ۱۵



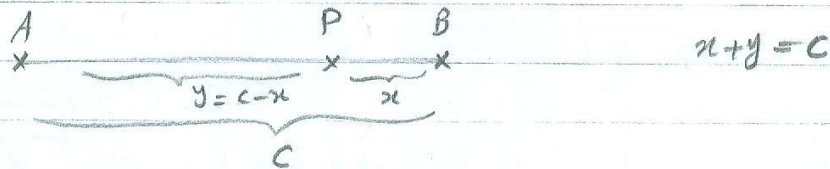
در ربع اول را حول خط $y=5$ دوران دهید و حجم حاصل را بیابید. ۷/۵
 روش اول: $R = 5 - y_1 = 5 + 2(x-1)^2 - 2 = 3 + 2(x-1)^2$
 $r = 5 - y_2 = 5 + 4(x-1)^2 - 4 = 1 + 4(x-1)^2$

$$V = \int_0^2 \pi (R^2 - r^2) dx = \pi \int_0^2 \left[(3 + 2(x-1)^2)^2 - (1 + 4(x-1)^2)^2 \right] dx = \dots$$

۱۵

۵- شدت نور در هر نقطه‌ای برابر است با حاصل ضرب عددی ثابت در قدرت منبع نور تقسیم بر مربع فاصله تا منبع. اگر قدرت دو منبع به ترتیب a و b ، و فاصله بین آن‌ها c باشد، در چه

نقطه‌ای از خط واصل بین دو منبع، شدت نور مینیمم است؟ فرض کنید که شدت نور در هر نقطه برابر است با مجموع شدت‌های ناشی از هر دو منبع.



$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow I(x, y) = \frac{ka}{y^2} + \frac{kb}{x^2}$$

$$\Rightarrow I(x) = \frac{ka}{(c-x)^2} + \frac{kb}{x^2} \Rightarrow I'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$I'(x) = 2ka(c-x)^{-3} - 2kbx^{-3} = 0$$

$$\frac{a}{(c-x)^3} = \frac{b}{x^3} \Rightarrow \left(\frac{c-x}{x}\right)^3 = \frac{a}{b}$$

$$\frac{c}{x} - 1 = \sqrt[3]{a/b} \Rightarrow \boxed{x = \frac{c}{1 + \sqrt[3]{a/b}}}$$

$$y = c - \frac{c}{1 + \sqrt[3]{a/b}}$$

« موفق باشید » زمان ۹ دقیقه

۸۳۹۱۰

نمودار

1- اگر $(\sqrt{x})^x = y^{2x}$ باشد، $\frac{dy}{dx}$ را بیابید. حل:

$$x \ln \sqrt{x} = 2x \ln y$$

$$x \ln x = 4x \ln y$$

$$\ln x = 4 \ln y \Rightarrow y = \sqrt[4]{\frac{x}{25}}$$

$$\sqrt{x} = y^2 \Rightarrow \sqrt{x} = y$$

$$y' = \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

5

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x+2x} \right)^{\omega-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{x+2x} \right)^{-\frac{1}{2}(2x+3) + \frac{1}{2}}$
 $= e^{(-2)(-\frac{1}{2})} = e$ 5

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x x \cdot f(t) dt = \frac{0}{0} \stackrel{Hop}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_2^x f(t) dt + x f(x)}{1} = 2 f(2)$ 7.5

ج) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{i^2 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$ 7.5

حجم را بیابید. $\frac{y}{\epsilon} + (x-1)^2 = 1$ و $y = x+1$, $x \geq 1$

$$y = -\epsilon(x-1)^2 + \epsilon$$

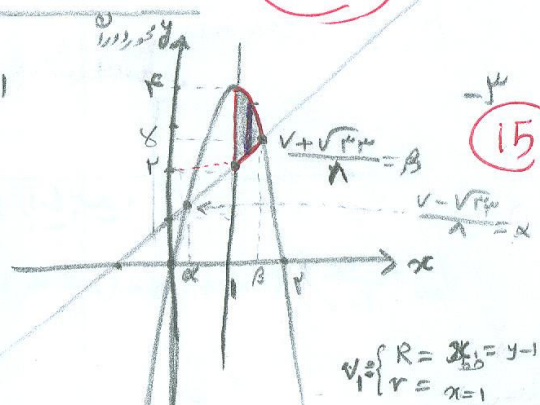
$$V = \int_1^{\beta} 2\pi x (y_{\text{بالا}} - y_{\text{پایین}}) dx$$

$$V = \int_1^{\beta} 2\pi x [-\epsilon(x-1)^2 + \epsilon - (x+1)] dx$$

$$V = \int_1^{\beta} 2\pi [-\epsilon x^3 + \nu x^2 - x] dx = 2\pi \left(-\frac{\epsilon}{4} x^4 + \frac{\nu}{3} x^3 - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^{\beta}$$

واژه $V = V_1 + V_2 = \int_1^{\delta} \pi [(y-1)^2 - 1] dy + \int_{\delta}^{\epsilon} \pi [(1+\sqrt{1-\frac{y}{\epsilon}})^2 - 1] dy$

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 1 - \frac{y}{\epsilon} \\ x = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{y}{\epsilon}} \end{cases}$$



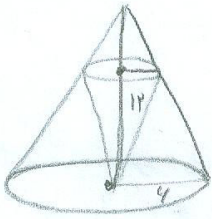
15

$$V_1: \begin{cases} R = x_{\text{بالا}} = y-1 \\ r = x-1 \end{cases}$$

$$V_2: \begin{cases} R = x_{\text{بالا}} = 1 + \sqrt{1 - \frac{y}{\epsilon}} \\ r = x-1 \end{cases}$$

4- میانگین تابع $y = x^2 - \sin x$ را از $x=0$ تا $x=\pi$ بیابید.

$$y_{av} = \frac{1}{\pi-0} \int_0^{\pi} (x^2 - \sin x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} + \cos x \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} - 1 - 1 \right) = \frac{\pi^3}{3} - \frac{2}{\pi} \quad (5)$$



5- ارتفاع مخروط قائم 12 فوت و شعاع قاعده آن 4 فوت است.
 مخروط درون آن مانند شکل ساخته شده است. ابعاد آن را بیابید که
 حجم max داشته باشد.

مخروط کوچک $\begin{cases} r \\ h \end{cases}$
 مخروط بزرگ $\begin{cases} R=4 \\ H=12 \end{cases}$

(15)



$$\frac{12}{12-h} = \frac{r}{4} \Rightarrow 4r = 12-h \Rightarrow r = \frac{12-h}{4}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (r-h)^2 h \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} (36h + \frac{h^3}{4} - 4h^2)$$

$$V' = 0 \Rightarrow 36 + \frac{3}{4} h^2 - 8h = 0 \Rightarrow h^2 - 12h + 48 = 0 \Rightarrow h = 4 \text{ و } 12$$

وقتی $h=4$ \leftarrow $\boxed{h=12=H}$ (مردود است)

$h=4$
 $\Rightarrow r = 4 - h/4 = 4 - 1 = 3$

$$\Rightarrow (r, h) = (3, 4) \Rightarrow V_{max} = \frac{\pi}{3} 4^3 = \frac{64\pi}{3}$$