Subject: حل مسائل درس ریاضیات پیش دانشگاهی

۱- نشان دهید: $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$

حل: $(x,y) \in$ (طرف چپ تساوی) $\Leftrightarrow (x,y) \in A \times C$ و $(x,y) \in B \times D$

$\Leftrightarrow x \in A,\ y \in C$ و $x \in B,\ y \in D$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B\ ,\ y \in C \cap D \Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$

$\Leftrightarrow (x,y) \in$ (طرف راست تساوی).

۲- ثابت کنید: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

حل:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
د	د	ن	ن	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د	د

۳- به استقراء ثابت کنید: $\forall n \in \mathbb{N}: 2^n > n$

حل: فرض می‌کنیم $P(n): 2^n > n$ لذا: $P(1): 2^1 > 1$ ✓

فرض استقراء: فرض کنیم $P(k)$ درست باشد یعنی $2^k > k$

باید ثابت کنیم $2^{k+1} > k+1$ (حکم استقراء)

اگر طرفین فرض استقراء را در ۲ ضرب کنیم داریم $2 \times 2^k > 2 \times k$

$\Rightarrow 2^{k+1} > k+k > k+1 \quad (k>1)$.

۴- دریک تصاعد هندسی جمله یازدهم ۲۷ برابر جمله هشتم است و جمله پنجم برابر ۵۶۷- است. قدر نسبت و جمله اول را حساب کنید.

یادآوری: $a_n = aq^{n-1}$

حل:

$$\frac{a_{11}}{a_8} = 27 \Longrightarrow \frac{aq^{10}}{aq^{7}} = 27 \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow \boxed{q = 3}$$

$$a_5 = -567 \Rightarrow aq^4 = -567 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-567}{3^4} = \frac{-3^4 \times 7}{3^4} = -7}$$

۵- دستگاه زیر را به روش الف) ماتریس معکوس ب) روش گاوس حل کنید:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 13 \\ 2x + 4y - 3z = -9 \\ 4x - 2y + 5z = 13 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل:}} \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -9 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

الف) روش ماتریس معکوس:

$$X = A^{-1} \cdot B \quad \& \quad |A| = 96$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{96} \begin{bmatrix} 14 & 11 & 1 \\ -22 & 17 & 19 \\ -20 & -2 & 26 \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \left| \text{حذف سطر } i \text{ و ستون } j \text{ از } A \right| \Longrightarrow A_{11} = +\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -22 \quad \text{و} \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 17 \quad \text{و} \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 19$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -20 \quad \text{و} \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{و} \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 26$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 11 \quad \text{و} \quad A_{31} = +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{و}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{96} \begin{bmatrix} 14 & 11 & 1 \\ -22 & 17 & 19 \\ -20 & -2 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ -9 \\ 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{96} \begin{bmatrix} 96 \\ -192 \\ 96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = 1} \text{ و } \boxed{y = -2} \text{ , } \boxed{z = 1}$$

ادامه سؤال ۵) ب) روش گوس

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۵ & -۳ & ۲ & ۱۳ \\ ۲ & ۴ & -۳ & -۹ \\ ۴ & -۲ & ۵ & ۱۳ \end{array}\right] \underset{-\frac{۴}{۵}R_1+R_3}{\overset{-\frac{۲}{۵}R_1+R_2}{\sim\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} ۵ & -۳ & ۲ & ۱۳ \\ ۰ & \frac{۲۶}{۵} & -۱۹/۵ & -۷۱/۵ \\ ۰ & \frac{۲}{۵} & ۱۷/۵ & ۱۳/۵ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{۱}{۱۳}R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} ۵ & -۳ & ۲ & ۱۳ \\ ۰ & \frac{۲۶}{۵} & \frac{-۱۹}{۵} & \frac{-۷۱}{۵} \\ ۰ & ۰ & \frac{۲۴۰}{۶۵} & ۲۴۰/۶۵ \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{۲۴۰}{۶۵} z = \frac{۲۴۰}{۶۵} \Longrightarrow \boxed{z=۱}$$

$$\frac{۲۶}{۵} y - \frac{۱۹}{۵} z = \frac{-۷۱}{۵} \Rightarrow ۲۶y = -۵۲ \Rightarrow \boxed{y=-۲}$$

$$۵x - ۳y + ۲z = ۱۳ \Longrightarrow \boxed{x=۱}$$

۶- مطلوب است محاسبه حدهای زیر:

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right) =$ مبهم

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^3}+x-\cancel{x^3}-1}{\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+\sqrt[3]{x^3+x}\,\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

$= ۰$ (چون درجه صورت از مخرج کمتر است)

ب) $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right) =$ مبهم

$= \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{x^2+1}{x^2-4}\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^-}\frac{5}{\varepsilon} = -\infty$ (مخرج از چپ به صفر میل کند)

ج) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}+1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(1-x)}{(x-1)}\cdot\frac{(\sqrt{x}-1)}{1} = (-1)\times 0 = 0$

د) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{[x^2]-4}{x^2-4} = \lim\limits_{a\to 0^-}\frac{-1}{a} = +\infty$ (وقتی $x\to2^-$ آنگاه $[x^2]=3$)

۷- ثابت کنید اگر $f(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه در a پیوسته است.

حل:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)+f(a)$$

$$= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\cdot(x-a)\right]+f(a)$$

$$= f'(a)\cdot\lim_{x\to a}(x-a)+f(a)$$

$$= f'(a)\times(0)+f(a)=f(a).$$

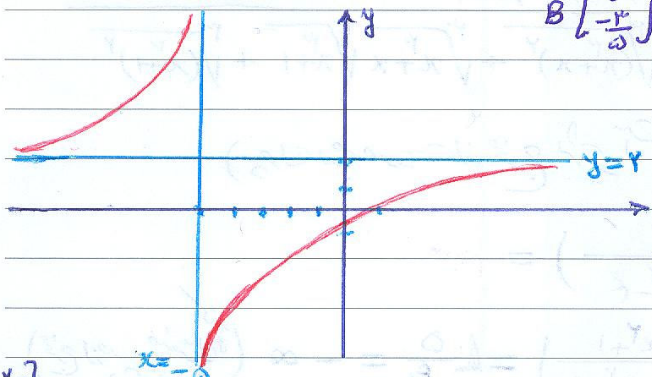
۸- توابع زیر را رسم کنید:

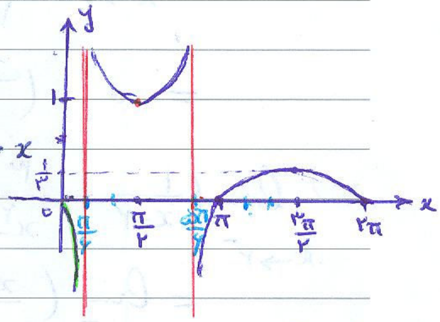
الف) $y=\frac{2x-3}{x+5}$

$x+5=0 \Rightarrow \boxed{x=-5}$ مجانب قائم ، $\lim_{x\to\infty} f(x)=2 \Rightarrow \boxed{y=2}$ مجانب افقی

$y'=\frac{13}{(x+5)^2}>0 \Rightarrow$ تابع صعودی است

نقاط اضافی $A\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\0\end{bmatrix}$ ، $B\begin{bmatrix}0\\-\frac{3}{5}\end{bmatrix}$





ب) در $[0,2\pi]$ $y=\frac{\sin x}{2\sin x-1} \Rightarrow y'=\frac{-\cos x}{(2\sin x-1)^2}=0 \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

$(\frac{\pi}{2},1)$ و $(\frac{3\pi}{2},\frac{1}{3})$

$2\sin x-1=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$ مجانب قائم

$y=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=0,\pi$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y'	$-$		0 $+$		$+$	0	$-$
y	0 ↘		1 ↗	0	↗	$\frac{1}{3}$ ↘	0

۹- مشتق بگیرید:

الف) $\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 5\sin 2t \end{cases}$

حل: $dy/dx = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{10\cos 2t}{-6\sin 2t} = -\dfrac{5}{3}\,\text{cotan}\, 2t$

ب) $\sqrt{\dfrac{x}{y}} + \tan(x-2y) = 3x^2 - 1 \Rightarrow F(x,y) = \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \tan(x-2y) - 3x^2 + 1 = 0$

حل: $y' = -\dfrac{F_x}{F_y} \Rightarrow y' = -\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{xy}} + \sec^2(x-2y) - 6x}{\dfrac{-\sqrt{x}}{2y\sqrt{y}} - 2\sec^2(x-2y)}$

ج) $y = \pi^{\sin^2(3x-1)} \Rightarrow$ حل: $y' = 6y\sin(3x-1)\cos(3x-1) \cdot \ln\pi$

$\Rightarrow y' = 3\pi^{\sin^2(3x-1)} \cdot \left[\sin 2(3x-1)\right] \ln\pi$

د) $y = \sec\left(e^{3x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) + \sin^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

حل: $y' = \left(3e^{3x} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\right)\tan\left(e^{3x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\sec\left(e^{3x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) + \dfrac{-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}}$

۱۰- عبارت مقابل را ساده کنید:

$\left(\dfrac{5}{x^2-x-2} - \dfrac{6}{x^2+x-6}\right) \div \dfrac{4}{x^2+4x+3} =$

حل: $= \left(\dfrac{5}{(x-2)(x+1)} - \dfrac{6}{(x-2)(x+3)}\right) \times \dfrac{(x+1)(x+3)}{4} =$

$\dfrac{5(x+3)}{4(x-2)} - \dfrac{6(x+1)}{4(x-2)} = \dfrac{9-x}{4(x-2)}$

۱۱- اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله $3x^2-2x-4=0$ باشند مقدار $x_1^3x_2 + x_1x_2^3$ را بدون حل معادله بیابید.

حل: $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = x_1x_2(x_1^2+x_2^2) = P(S^2-2P) = \dfrac{-4}{3}\left(\dfrac{4}{9} + \dfrac{8}{3}\right)$

$P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-4}{3}$, $S = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{2}{3}$ $\qquad = \dfrac{-112}{27}$

۱۲- نامعادله $\frac{x}{x^2+x+3} \le \frac{1}{x-1}$ را حل کنید.

حل: $\frac{x}{x^2+x+3} - \frac{1}{x-1} \le 0 \Rightarrow \frac{-(2x+3)}{(x-1)(x^2+x+3)} \le 0$

چون علامت عبارت x^2+x+3 که دارای $\Delta<0$ است همواره مثبت است لذا کافیست

نامعادله $\frac{2x+3}{x-1} \ge 0$ را حل کنیم

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x+3}{x-1}$	$+$	0	$-$	تعریف نشده	$+$	

مجموعه جواب $= (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup (1, +\infty)$

۱۳- معادله خطی را بنویسید که از $B\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$ بگذرد و بر خط $3x-2y=5$ عمود باشد.

فاصله نقطه $P\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$ از این خط چقدر است؟

حل: $3x-5=2y \Rightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2} \Rightarrow m_1=\frac{3}{2}$

شیب خط عمود $\Rightarrow m_2=\frac{-1}{m_1}=\frac{-2}{3} \Rightarrow y-y_1=m_2(x-x_1)$

$y-3=\frac{-2}{3}(x+2)$

$\Rightarrow \frac{-2}{3}x-y+\frac{5}{3}=0 \Rightarrow 2x+3y-5=0$

فاصله P تا خط: $d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2(-1)+3(2)-5|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$

۱۴- معادله زیر را حل کنید: $\log_2(x^2-1)-\log_2(x^2+2x-3)=1$

حل: $\log_2\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\log_2 2 \Rightarrow x^2-1=2x^2+4x-6$

$\Rightarrow x^2+4x-5=0 \Longrightarrow x=1$ و $\boxed{x=-5}$

جواب $x=1$ غیرقابل قبول است زیرا صفر لگاریتم ندارد.

۱۵- حاصل عبارات زیر را ساده کنید:

الف) $$\frac{\sin 225^\circ \times \cos 45^\circ + \cos 150 \times \sin 60}{\tan 210 \times \cot 60 - \cot 240 \times \tan 330} = ?$$

حل:
$$= \frac{-\sin 45 \cos 45 - \cos 30 \sin 60}{\tan 30 \cot 60 + \cot 60 \tan 30}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{2}{3}} = -\frac{15}{8}$$

ب) $$\frac{\sin 7x}{\sin x} - 2\cos 2x - 2\cos 4x - 2\cos 6x = ?$$

حل: اگر کل عبارت را برابر A قرار دهیم و طرفین آن را در $\sin x$ ضرب کنیم داریم:

$$A \cdot \sin x = \sin 7x - 2\cos 2x \sin x - 2\cos 4x \sin x - 2\cos 6x \sin x$$

چون $2\cos\alpha \sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$ لذا

$$A \cdot \sin x = \sin 7x - (\sin 3x - \sin x) - (\sin 5x - \sin 3x) - (\sin 7x - \sin 5x)$$

$$\Rightarrow A = 1$$

مسئله: ساده کنید $B = \cos^2(a+b) + \cos^2(a-b) - \cos 2a \cos 2b = ?$

حل: چون $2\cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ پس

$$\cos 2a \cdot \cos 2b = \frac{1}{2}\left[\cos 2(a+b) + \cos 2(a-b)\right] = \frac{1}{2}\left[2\cos^2(a+b) - 1 + 2\cos^2(a-b) - 1\right]$$

$$\Rightarrow \cos 2a \cdot \cos 2b = \cos^2(a+b) + \cos^2(a-b) - 1$$

$$\Rightarrow B = 1 + \cos 2a \cos 2b - \cos 2a \cos 2b \Rightarrow B = 1$$

حل مسائل درس ریاضیات پیش دانشگاهی

۱- ثابت کنید: $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

حل: $(x,y)\in$ طرف چپ $\Leftrightarrow x\in A$ و $y\in(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A$ و $y\in B$, $y\in C$

$\Leftrightarrow x\in A, y\in B$ و $x\in A, y\in C$

$\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)$ و $(x,y)\in(A\times C)$

$\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$

$\Leftrightarrow (x,y)\in$ طرف راست

عکس روابط بالا نیز برقرار است؛ لذا تساوی برقرار است.

۲- مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع مقابل در $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} b[x]+3ax, & x>1\\ 7, & x=1\\ \dfrac{3a\sqrt{(x-1)^2}}{x^3-1}+2b, & x<1\end{cases}$$

حل: باید

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{3a\left(\sqrt{(x-1)^2}\right)}{x^3-1}+2b=\lim_{x\to1^-}\frac{-3a(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}+2b$$

$$=\frac{-3a}{1+1+1}+2b=-a+2b \quad , \quad f(1)=7$$

از طرفی

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(b[x]+3ax\right)=b+3a$$

$$\begin{cases} 2b - a = 7 \\ b + 3a = 7 \end{cases} \Longrightarrow a = \frac{7}{9} \quad \& \quad b = \frac{70}{18}$$

۳- مشتق بگیرید:

الف) $y = x^2 e^{\pi x} - \ln(3\sqrt{x}+1)$

حل: $y' = 2x e^{\pi x} + \pi e^{\pi x} \cdot x^2 - \dfrac{\frac{3}{2\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}+1}$

ب) $3x^2 y - \dfrac{x}{y} + e^{xy} = 1 - 2y^2$

حل: $\Rightarrow F(x,y) = 3x^2 y - \dfrac{x}{y} + e^{xy} + 2y^2 - 1 = 0$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{6xy - \frac{1}{y} + ye^{xy} + 0}{3x^2 + \frac{x}{y^2} + xe^{xy} + 4y}$$

ج) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{e}\right) + \cos^2(\sin^3 5x)$

حل: $y' = \dfrac{-3/x^2}{1 + \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{e}\right)^2} + 2\cos(\sin^3 5x) \cdot \left[-\sin(\sin^3 5x)\right] \times 15\sin^2 5x \cdot \cos 5x$

د) $\begin{cases} x = 5t^2 - 1 \\ y = \sqrt{t} + \dfrac{2}{t} \end{cases}$

حل: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{2}{t^2}}{10t}$

۴- گویا کنید:

الف) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} \times \dfrac{\sqrt[3]{3} - 1}{\sqrt[3]{3} - 1} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt[3]{3} - 1)}{3 - 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt[3]{3} - 1)$

ب) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}} \times \dfrac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{3 + 2} = (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})\left(\dfrac{1}{5}\right)$

۵- مقدار K را طوری بیابید که معادله $(2K-1)x^2-(K-3)x+K=0$

الف) دو ریشه عکس داشته باشد.

حل: باید

$$P=\frac{c}{a}=\frac{K}{2K-1}=1$$

لذا

$$K=2K-1 \Rightarrow \boxed{K=1}$$

ب) ریشه مضاعف داشته باشد. حل: باید $\Delta=0$

$$b^2-4ac=[-(K-3)]^2-4(2K-1).K=0 \Rightarrow -7K^2-2K+9=0$$

$$K_1,K_2=\frac{+1\pm\sqrt{64}}{-7}=\frac{1\pm 8}{-7}=-9/7 \text{ , } 1$$

$$\Rightarrow K_1=\frac{-9}{7} \quad \text{و} \quad K_2=1$$

۶- معادله زیر را حل کنید: $\log_{3} 9+\log_{x^2} 3=\frac{5}{2}$

حل:

$$\log_{3} 3^2+\log_{x^2} 3=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2\log_{3} 3+\frac{1}{2}\log_{x} 3=\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\log_{x} 3=\frac{1}{2} \Rightarrow \log_{x} 3=1$$

$$\Rightarrow x=3$$

(تذکر: اگر معادله $\log_{x} 9+\log_{x^2} 3=\log\frac{5}{2}$ باشد آن را حل کنید.)

۷- نامعادله $(x+3)^2+x-1>(2-3x)^2$ را حل کنید.

حل:

$$x^2+6x+9+x-1>4+9x^2-12x$$

$$\Rightarrow 8x^2-19x-4<0$$

$\Delta=\sqrt{489}$ و

x	$-\infty$		$\frac{1}{16}(19-\sqrt{489})$		$\frac{1}{16}(19+\sqrt{489})$		$+\infty$
$8x^2-19x-4$		+	0	−	0	+	

$$\text{مجموعه جواب}=\left(\frac{19-\sqrt{489}}{16} , \frac{19+\sqrt{489}}{16}\right)$$

۸- معادله ارتفاع AH در مثلث ABC به رئوس $A\begin{vmatrix}-1\\2\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}5\\-4\end{vmatrix}$ را بیابید. طول میانه BM چقدر است؟

حل: AH عمود است که شیب آن عکس و قرینه شیب BC است و از نقطه A می‌گذرد

$$\text{شیب } BC = m = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{3-(-4)}{2-5} = \frac{7}{-3} \Rightarrow m_{AH} = \frac{3}{7}$$

$$\text{معادله ارتفاع } AH: \quad y - y_A = m_{AH}\cdot(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = \frac{3}{7}(x+1)$$

$$\Rightarrow y - \frac{3}{7}x - \frac{17}{7} = 0$$

طول میانه BM:

$$\overline{BM} = \sqrt{(y_M - y_B)^2 + (x_M - x_B)^2}$$

$$M \text{ وسط } AC: \quad M = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2-4}{2}\right)$$

$$M = (2, -1)$$

$$\overline{BM} = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{16} = 4$$

۹- جواب معادله زیر را بیابید.

$$\sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x + 4\cos x - 2 = 0$$

حل:

$$\sqrt{3}\sin x(2\cos x - 1) + 2(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\sqrt{3}\sin x + 2) = 0$$

$$2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

یا $(\sqrt{3}\sin x + 2) = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{-2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \operatorname{Arc}\sin\frac{-2}{\sqrt{3}} = \alpha$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \quad \text{و} \quad x = 2k\pi + \pi - \alpha$$

۱۰- به استقراء ثابت کنید: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

حل: الف) فرض کنیم $P(n):\ 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

درست است زیرا: $P(1)$ $P(1):\ 1 = \frac{1\times(1+1)}{2} = 1$

فرض کنید $P(k)$ درست باشد (فرض استقراء) $P(k):\ 1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

ثابت می‌کنیم (حکم استقراء) $P(k+1):\ 1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

ب) حال فرض کنید $P(n):\ 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$P(1)$ برقرار است زیرا $P(1):\ 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$

فرض کنید $P(k)$ برقرار باشد یعنی $P(k):\ 1^3+2^3+\cdots+k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

ثابت می‌کنیم $P(k+1)$ درست است یعنی $P(k+1):\ 1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3 = (k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+(k+1)\right]$$
$$=(k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right] = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

۱۱- مطلوبست محاسبه حدهای زیر:

الف) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1} =$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{2x-x^2}+1)}{2x-x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x-x^2}+1}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$$

ب) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{(x-1)} \cdot \dfrac{1}{x+1} = 1\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = 1$ (زیرا: $\dfrac{1}{x}-1 \leq \left[\dfrac{1}{x}\right] < \dfrac{1}{x} \xrightarrow{\times x}$

$\Longrightarrow 1-x \leq x\left[{}^{1}\!/_{x}\right] < 1 \Longrightarrow$

چون $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = \lim\limits_{x\to 0^+}(1-x) = 1$ بنابه قضیه ساندویچ (فشردگی) داریم: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[{}^{1}\!/_{x}\right] = 1$

د) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0$ اگر حد مقابل صفر باشد a , b را بیابید

حل: $= \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1-(ax+b)(x+1)}{x+1}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1} = 0$

$\Longrightarrow$ ضرایب x و x^2 در صورت باید صفر باشد

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1-a=0 \Longrightarrow a=1 \\ a+b=0 \Longrightarrow b=-1 \end{cases}$$

۱۲- در یک تصاعد حسابی شامل ۳۱ جمله دو جمله قبل و بعد جمله وسط به ترتیب $10\frac{1}{3}$ و $11\frac{2}{3}$ است. قدر نسبت و جمله‌های اول و آخر را بیابید.

حل: چون $a_n = a+(n-1)d$ پس:

$$\begin{cases} 11\frac{2}{3} = a_{17} = a+16d \\ 10\frac{1}{3} = a_{15} = a+14d \end{cases}$$

$11\frac{2}{3} - 10\frac{1}{3} = 2d \Rightarrow \boxed{d=\frac{2}{3}}$, $11\frac{2}{3} = a+16\left(\frac{2}{3}\right)$

$\Longrightarrow a = \dfrac{35}{3} - \dfrac{32}{3} = \dfrac{3}{3} = 1 \Longrightarrow \boxed{a=1}$ جمله اول

جمله آخر $a_{31} = a+30d \Longrightarrow a_{31} = 1+30\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \boxed{a_{31}=21}$

۱۳- الف) نسبت‌های مثلثاتی $\sin 75^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را بیابید.

حل: $\sin(75) = \sin(45+30) = \sin 45 \cdot \cos 30 + \cos 45 \sin 30$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15 = \sin(90-15) = \sin 75 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

ب) حاصل عبارت زیر را ساده کنید: $A = \cos^2(a+b) + \cos^2(a-b) - \cos 2a \cos 2b = ?$

حل: از فرمولهای زیر استفاده می‌کنیم

① $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

② $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ④ $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

③ $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$

$$A \underset{}{\overset{\text{با توجه به ①}}{=}} \left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]^2 - 2\cos(a+b)\cdot\cos(a-b) - \cos 2a \cos 2b$$

$$\overset{\text{با توجه به ②}}{=} \left[2\cos a \cos b\right]^2 - (\cos 2b + \cos 2a) - \cos 2a \cos 2b$$

$$= 4\cos^2 a \cos^2 b - \cos 2b - \cos 2a - \cos 2a \cos 2b$$

$$= (1+\cos 2a)(1+\cos^2 b) - \cos 2b - \cos 2a - \cos 2a \cos 2b$$

$$= 1 + \cancel{\cos^2 b} + \cancel{\cos 2a} + \cancel{\cos 2a \cos 2b} - \cancel{\cos 2b} - \cancel{\cos 2a} - \cancel{\cos 2a \cos 2b}$$

$A = 1$ (این مسئله در صفحه ۷ نیز به طریق دیگر حل شده است.)

۱۴- توابع زیر را در فاصله‌های داده شده رسم کنید. (sgn تابع علامت است)

الف) $y = \operatorname{sgn}(x^2-3x-10) + \frac{|x^2-3x-10|}{x-5} + \frac{x^2-3x-10}{|x+2|}$, در $(-\infty, +\infty)$

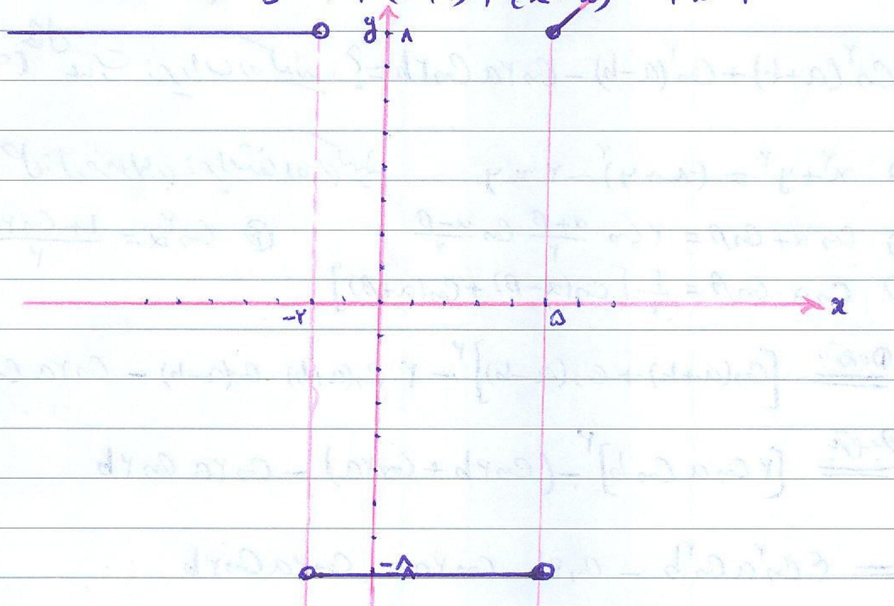
x		-2		5	
$(x+2)(x-5) = x^2-3x-10$	+	0	−	0	+
$x-5$	−		−	0	+
$x+2$	−	0	+		+

$x=-2 ,\ x=5 \Rightarrow$ y = تعریف نشده

(I) $x<-2 \Rightarrow y = 1 + \frac{\cancel{(x-5)}(x+2)}{\cancel{(x-5)}} + \frac{(x-5)\cancel{(x+2)}}{-\cancel{(x+2)}} = -8$

(II) $-2<x<5 \Rightarrow y = -1 + \frac{-\cancel{(x-5)}(x+2)}{\cancel{(x-5)}} + \frac{(x-5)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}} = -8$

(III) $x>5 \Rightarrow y = 1 + (x+2) + (x-5) = 2x-2$



۲) $y = x[x] + sgn(x-2) \quad , \quad 0 \le x \le 3$

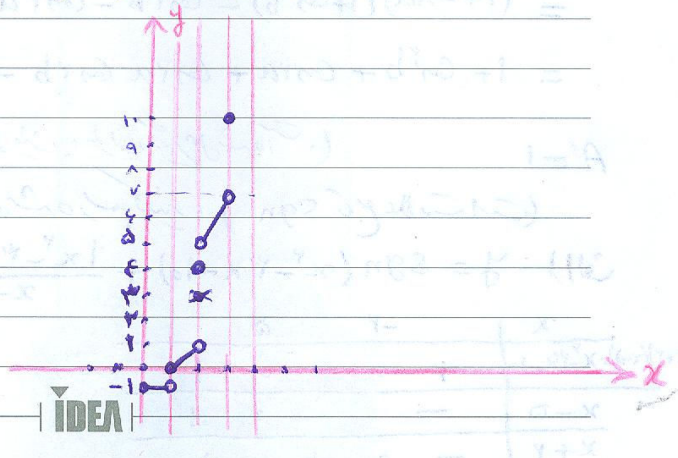
$0 \le x < 1 \Rightarrow y = -1$

$1 \le x < 2 \Rightarrow y = x-1$

$x = 2 \Rightarrow y = 4$

$2 < x < 3 \Rightarrow y = 2x+1$

$x = 3 \Rightarrow y = 10$



Hassan.khavazi.net

۱۵- دستگاه زیر را به روش الف) کرامر ب) گوس جردن حل کنید.

$$\begin{cases} 3x+8y-z=-18 \\ 2x+y+5z=8 \\ 2x+4y+2z=-4 \end{cases} \Rightarrow \underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} -18 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}}$$

الف) روش کرامر: حل

$$|A| = (6+80-8)-(-2+32+60) = -12$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -18 & 8 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \\ -4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -18 & -1 \\ 2 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 24$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -18 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 24 \Rightarrow x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{0}{-12} = 0 \quad \text{و} \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{24}{-12} = -2$$

$$z = \frac{-24}{-12} = +2$$

ب) روش گوس جردن:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & -1 & -18 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{2}{3}R_1+R_2]{-R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & -1 & -18 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{6}R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & -1 & -18 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{8}{3}R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{14}{5}R_3+R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{6}{5}R_3+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 5 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ -3y = 6 \Rightarrow y = -2 \\ \frac{5}{2}z = 5 \Rightarrow z = 2 \end{cases}$$